Smarandache
函数及其相关问题研究
vol.8

马荣著

$$S(n)=min\{m:m\in \mathcal{N},n\mid m!\}$$

The Educational Publisher 2012

This book can be ordered in a paper bound reprint from:

The Educational Publisher Inc.
1313 Chesapeake Ave.
Columbus, Ohio 43212
USA
Toll Free: 1-866-880-5373
E-mail: info@edupublisher.com

Peer Reviewer:
Prof. Wenpeng Zhang, Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an, Shaanxi, P. R. China.
Prof. Xingsen Li, Ningbo Institute of Technology, Zhejiang University, Ningbo, P. R. China.
Prof. Chunyan Yang and Weihua Li, Guangdong University of Technology, Institute of Extenics and Innovative Methods, Guangzhou, P. R. China.
Prof. Qiaoxing Li, Lanzhou University, Lanzhou, P. R. China.
Ph. D. Xiaomei Li, Dept. of Computer Science, Guangdong University of Technology, P. R. China.

Many books can be downloaded from the following Digital Library of Science:
http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/eBooks-otherformats.htm

ISBN: 9781599731902
Words: 175,000
Standard Address Number: 297-5092
Printed in the United States of America

目　录

前　言

数论又称作整数论, 是研究数的规律, 特别是研究整数性质的数学分支. 数论形成一门独立的学科后, 随着其他数学分支的发展, 研究数论的方法也在不断的发展, 现代数论已经深入到数学的许多分支, 在中国, 数论也是发展最早的数学分支之一. 古希腊人和中国人等很早就有了数论知识.

数论在数学中的地位是独特的, 高斯曾经说过“数学是科学的皇后, 数论是数学中的皇冠”. 因此, 数学家都喜欢把数论中一些悬而未决的疑难叫做“皇冠上的明珠”, 以鼓励人们去“摘取”. 数论刚开始的时候是用朴素的推理方法研究整数的性质, 即初等数论. 后来慢慢发展出现解析数论, 代数数论, 组合数论等. 它们因为研究方法的不同而各为其名, 但都以同余作为其最基本的理论依据.

本书主要对Smarandache函数及其相关问题的近期研究结果进行整理综述, 主要介绍了Smarandache函数及与其它相关函数结合的研究进展, 同时还介绍了伪Smarandache 函数及与其它相关函数联系的一些最新研究结果, 最后介绍几个解析数论中的问题并提出一些新的问题. 具体来说, 本书主要作如下安排:

第一章主要简单介绍Smarandache函数及伪Smarandache函数的背景和定义; 第二章主要介绍Smarandache函数与伪Smarandache函数的研究结果及一些新的问题; 第三章主要介绍与Smarandache函数及伪Smarandache函数相关的一些其它函数的研究结果; 第四章主要介绍Smarandache序列的一些研究成果; 第五章主要介绍数论中其它序列及Dirichlet L-函数的几个研究成果.

本书是基于Smarandache函数及其相关一系列数论问题的新的研究成果的汇总. 在完成过程中, 受到了张文鹏教授的多次指导, 对此作者表示非常感谢. 同时作者也感谢西北工业大学基础研究基金对本书的资助. 最后向所有为本书作出贡献的老师和学生、同行和编辑表示衷心的感谢. 由于作者水平有限, 书中难免出现错误, 欢迎广大读者批评指正.

第一章 简介

在《只有问题, 没有解答》一书中, 美籍罗马尼亚著名数论专家F.Smarandache教授提出了108个尚未解决的数论问题, 这引起了众多数论专家的兴趣. 本书主要介绍了文中有关Smarandache函数与伪Smarandache函数及其相关问题的研究和新进展.

对任意正整数n著名的Smarandache函数$S(n)$定义为最小的正整数m使得$n|m!$, 即

$$S(n)=\min\{m: m\in N, n|m!\}.$$

从$S(n)$的定义人们容易推出如果$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示n的标准分解式, 那么

$$S(n)=\max_{1\leq i\leq r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}.$$

由此不难计算出$S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=3$, $S(4)=4$, $S(5)=5$, $S(6)=3$, $S(7)=7$, $S(8)=4$, $S(9)=6$, $S(10)=5$, $S(11)=1$, $S(12)=4$, $S(13)=13$, $S(14)=7$, $S(15)=5$, $S(16)=6\cdots$.

对任意正整数n著名的伪Smarandache函数$Z(n)$定义为最小的正整数m使得n整除$\frac{m(m+1)}{2}$, 即

$$Z(n)=\min\left\{m: m\in N, n\left|\frac{m(m+1)}{2}\right.\right\}.$$

从$Z(n)$的定义容易推出$Z(n)$的前几个值为: $Z(1)=1, Z(2)=3, Z(3)=2, Z(4)=7, Z(5)=4, Z(6)=3, Z(7)=6, Z(8)=15, Z(9)=8, Z(10)=4, Z(11)=10, Z(12)=8, Z(13)=12, Z(14)=7, Z(15)=5, Z(16)=31, \cdots$.

关于$S(n)$和$Z(n)$的算术性质, 许多学者都进行了研究, 获得了不少有趣的结果. 本书主要围绕这两类函数及其相关函数的最新研究进展做一个系统的归纳总结. 具体地说, 本书主要包括Smarandache函数与伪Smarandache函数的研究结果、与Smarandache函数及伪Smarandache函数相关问题研究结果和Smarandache序列研究结果等, 为数论爱好者提供参考资料, 也为研究Smarandache问题的学者提供查阅文献的方便.

第二章　Smarandache函数与伪Smarandache函数

2.1　关于Smarandache函数的一个猜想

对任意正整数n, 著名的F. Smarandache函数$S(n)$定义为最小的正整数m使得$n|m!$. 例如$S(n)$的前几个值$S(1) = 1$, $S(2) = 2$, $S(3) = 3$, $S(4) = 4$, $S(5) = 5$, $S(6) = 3$, $S(7) = 7$, $S(8) = 4$, $S(9) = 6$, $S(10) = 10$, $S(11) = 11$, $S(12) = 4, \cdots$. 关于$S(n)$的简单算术性质, 请参阅文献[1, 7], 这里不再重复.

关于$S(n)$的更深刻性质, 许多学者进行了研究, 获得了不少有趣的结果, 例如F. Luca教授在文献[2]中讨论了函数

$$A(x) = \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} S(n)$$

的上下界估计问题, 给出了$A(x)$的一个较强的上界估计. 同时他还在文献[3]中证明了级数

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^{\alpha}}{S(1)\cdot S(2)\cdots S(n)}$$

是绝对收敛的, 并提出了下面的猜测:

猜想: 对任意实数$x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$LS(x) \equiv \sum_{n\leqslant x} \ln S(n) = \ln x - \ln\ln x + O(1).$$

关于这一猜想, 至今似乎没有人研究, 至少在现有的文献中还没看到有关结论. F. Luca 教授认为有可能证明$\ln x - \ln\ln x$是$LS(x)$的上界, 但是很难证明$LS(x)$的下界. 这一问题是有意义的, 至少可以反映出$S(n)$函数的对数均值分布性质. 为此, 针对这一问题, 利用初等及解析方法进行研究, 可以得出截然不同的结论, 即如下定理:

定理 2.1 对于任意实数$x \geqslant 1$, 有渐近公式

$$LS(x) \equiv \sum_{n\leqslant x} \ln S(n) = \ln x + O(1).$$

显然此定理不仅说明猜想的第二个主项$\ln\ln x$是不存在的, 也就是说,文献[3]中的猜测是错误的, 同时也给出了$LS(x)$的正确表示形式. 当然如果利用素数分布中的深刻结果, 还可以得到更精确的渐近公式, 即就是

对任意正整数$k \geqslant 1$, 有

$$LS(s) \equiv \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\ln S(n) = \ln x + C + O\left(\frac{1}{\ln^k x}\right),$$

其中C为可计算的常数.

为了证明定理2.1, 需要下面的几个引理.

引理 2.1 对任意素数p, 有渐近公式

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1),$$

$$\sum_{p\leqslant x}\ln p = x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right).$$

证明:参阅文献[4 − 6].

下面利用此引理直接给出定理的证明. 首先给出$LS(x)$的上界估计.

事实上, 由$S(n)$的初等性质知, 对任意正整数n有$S(n) \leqslant n$, 所以由Euler求和公式(参阅文献[6]中定理3. 1), 有

$$\begin{aligned}
LS(x) &= \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\ln S(n) \leqslant \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\ln n \\
&= \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\int_1^x \ln n dy \leqslant \frac{1}{x}\int_1^x \ln y dy + \frac{\ln(x+1)}{x} \\
&= \ln x - 1 + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x}.
\end{aligned}$$

即

$$LS(x) = \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\ln S(n) \leqslant \ln x + O(1). \tag{2-1}$$

其次, 同样利用上面的引理来估计$S(x) \equiv \frac{1}{x}\sum\limits_{n\leqslant x} LnS(n)$ 的下界. 对任意正整数$n > 1$, 显然n至少有一个素因子p, 不妨设$n = p \cdot n_1$, 于是由$S(n)$的性质

$$S(n) \geqslant p$$

知

$$\ln S(n) = \ln S(p \cdot n_1) \geqslant \ln p.$$

从而由熟知的分拆恒等式(参阅文献[6]定理3.17), 有

$$\begin{aligned}
&LS(x) \\
&= \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\ln S(n)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant \frac{1}{x}\sum_{pn_1\leqslant x}\ln p\\
&=\frac{1}{x}\left\{\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\ln p\cdot\sum_{n\leqslant\frac{x}{p}}1+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}1\cdot\sum_{p\leqslant\frac{x}{n}}\ln p-\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\ln p\cdot\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}1\right\}\\
&=\frac{1}{x}\left\{\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\ln p\cdot\left(\frac{x}{p}+O(1)\right)+\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}1\cdot\left(\frac{x}{n}+O\left(\frac{x}{n\ln x}\right)\right)-\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\ln p\cdot\left(\sqrt{x}+O(1)\right)\right\}\\
&=\frac{1}{x}\left\{x\cdot\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\frac{\ln p}{p}+O\left(\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\ln p\right)+x\cdot\sum_{n\leqslant\sqrt{x}}\frac{1}{n}+O(x)-\sqrt{x}\cdot\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\ln p+O(\sqrt{x})\right\}\\
&=\frac{1}{x}\left\{x\cdot\ln\sqrt{x}+O(\sqrt{x})+x\ln\sqrt{x}+O(x)-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\right)\right)\right\}\\
&=\ln\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}+O(1)\\
&=\ln x+O(1).
\end{aligned}
$$

即

$$LS(x)\geqslant\ln x+O(1). \tag{2-2}$$

由式(2-1)及(2-2)有

$$LS(x)=\ln x+O(1).$$

于是完成定理2.1的证明.

2.2 一类包含Smarandache函数和Euler函数的方程I

对于任意正整数n, 著名的Smarandache函数$S(n)$定义为最小正整数m使得$n|m!$, 即就是$S(n)=\min\{m: m\in N, n|m!\}$.Smarandache函数的各种性质是数论及其应用领域中一个十分引人关注的研究课题(参阅文献[1,7]). 对于正整数n, 设$\phi(n)$是关于n的Euler函数, 这里的$\phi(n)$表示不大于n且与n互素的正整数的个数(参阅文献[4]). 关于包含Euler函数和Smarandache函数的方程

$$\phi(n)=S(n^k) \tag{2-3}$$

的解,很多学者都进行了研究,得到了一些较好的结果[9−12]. 可以利用初等的方法解决该方程在$k=7$时的求解问题, 即给出下面的定理.

定理 2.2 当$k=7$时, 方程$\phi(n)=S(n^k)$仅有解$n=1,80$.

为了证明定理2.2, 需要下面的几个引理.

引理 2.2 Euler函数为积性函数, 即对于任意互素的正整数m和n, 则有$\phi(mn)=\phi(m)\phi(n)$.

引理 2.3 设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$是正整数$n$的标准分解式, 则有

$$\phi(n)=\prod_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1).$$

引理 2.4 当$n>2$时, 则必有$2|\phi(n)$.

证明: (1)若正整数n有奇素因子, 不妨设为p, 则$p>2$且$2|p-1$.又由引理2.3可得$(p-1)|\phi(n)$,所以易知$2|\phi(n)$.

(2)若正整数n没有奇素因子, 当$n>2$时, 必有$n=2^k$,k是大于1的正整数.由Euler函数的性质易得$\phi(n)=2^{k-1}(2-1)=2^{k-1}$, 所以也有$2|\phi(n)$. 故由(1)和(2)可知, 引理2.4成立.

引理 2.5 设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$是正整数$n$的标准分解式, 则

$$S(n)=\max\{S(p_1^{\alpha_1}),S(p_2^{\alpha_2}),\cdots,S(p_k^{\alpha_k})\}.$$

证明: 参阅文献[7].

引理 2.6 对于素数p和正整数k, 有$S(p^k)\leqslant kp$.特别地, 当$k<p$时, 有$S(p^k)=kp$.

证明: 参阅文献[7].

引理 2.7 设$y=p^{\alpha-2}(p-1)-\alpha p, p$为素数, 则当$\alpha>3$时, 函数$y$是单调递增的.

证明: 因为$y'=(p-1)p^{\alpha-2}\ln p-p$,当$\alpha>3$时, 易知$y'>0$,故结论成立.

下面给出定理2.2的证明.把$k=7$代入方程$\phi(n)=S(n^k)$中,即

$$\phi(n)=S(n^7). \tag{2-4}$$

显然$n=1$是式(2-4)的解. 以下主要讨论$n>1$的情况.

设$n>1$且$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$是正整数$n$的标准分解式,则由引理2.5有

$$S(n^7)=\max\{S(p_1^{7\alpha_1}),S(p_2^{7\alpha_2}),\cdots,S(p_k^{7\alpha_k})\}=S(p^{7r}). \tag{2-5}$$

由引理2.2可知,

$$\phi(n)=\phi(p^r)\phi\left(\frac{n}{p^r}\right)=p^{r-1}(p-1)\phi\left(\frac{n}{p^r}\right). \tag{2-6}$$

联立式(2-4)一式(2-6)可得,

$$p^{r-1}(p-1)\phi\left(\frac{n}{p^r}\right)=S(p^{7r}). \tag{2-7}$$

①当$r=1$时, 若$p=2$,由式(2-7)可知

$$S(2^7)=8=\phi\left(\frac{n}{2}\right),$$

即$n=32$, 而

$$\phi(32)=2^5-2^4=16\neq S(32^7),$$

故$n=32$不是式(2-4)的解.

若$p=3$,则

$$S(3^7)=18=2\phi\left(\frac{n}{3}\right),$$

这与引理2.4矛盾, 所以式(2-4)无解.

同理可得, 若$p=5,7,11$时, 式(2-4)无解.

若$p>11$,则

$$S(p^7)=7p=(p-1)\phi\left(\frac{n}{p}\right),$$

且$2|p-1$, 这与引理2.4矛盾, 所以式(2-4)无解.

②当$r=2$时, 若$p=2$, 由式(2-7)可知

$$S(2^{14})=16=2\phi\left(\frac{n}{4}\right),$$

即$\phi(\frac{n}{4})=8$, 则$n=64$,而

$$S(64^7)=S(2^{42})=46\neq 32=2^6-2^5=\phi(64),$$

所以$n=64$不是式(2-4)的解.

若$p=3$, 则

$$S(3^{14})=30=6\phi\left(\frac{n}{9}\right),$$

这与引理2.4 矛盾, 所以式(2-4)无解.

同理可证,若$p=5,7,11,13$,式(2-4)无解.

若$p\geqslant 17$,则

$$S(p^{14})=14p=p(p-1)\phi\left(\frac{n}{p^2}\right),$$

即有

$$7=\frac{p-1}{2}\phi\left(\frac{n}{p^2}\right),$$

这与引理2.4矛盾, 式(2-4)无解.

③当$r=3$时, 若$p=2$,

$$S(2^{21})=24=2^2\phi\left(\frac{n}{8}\right),$$

则$\frac{n}{8}=9$, 所以$n=72$, 而

$$\phi(72)=(2^3-2^2)(3^2-3)=24,\ S(72^7)=S(2^{21}\cdot 3^{14})=30\neq 24=\phi(72),$$

故$n=72$不是式(2-4)的解.

若$p=3$,则

$$S(3^{21})=45=18\phi\left(\frac{n}{27}\right),$$

这与引理2.4矛盾, 式(2-4)无解.

若$p=5,7,11,13,17,19$,同理可证式(2-4)无解.

若$p\geqslant 23$,由引理2.6有,

$$S(p^{21})=21p=p^2(p-1)\phi\left(\frac{n}{p^3}\right),$$

即

$$21=p(p-1)\phi\left(\frac{n}{p^3}\right),$$

这与$p\geqslant 23$矛盾,故式(2-4)无解.

④当$r=4$时, 若$p=2$,

$$S(2^{28})=32=2^3\phi\left(\frac{n}{16}\right),$$

即$\phi\left(\frac{n}{16}\right)=4$, 所以$n=80$,而

$$\phi(80)=(2^4-2^3)(5-1)=32, S(80^7)=S(2^{28}\cdot 5^7)=32=\phi(80),$$

故$n=80$是式(2-4)的解.

若$p=3$,

$$S(3^{28})=60=3^3\cdot 2\phi\left(\frac{n}{81}\right),$$

这是不可能的, 因此式(2-4)无解.

若$p\geqslant 5$,由引理2.6有,

$$28p\geqslant S(p^{28})=p^3(p-1)\phi\left(\frac{n}{p^4}\right),$$

即

$$28\geqslant p^2(p-1)\phi\left(\frac{n}{p^4}\right),$$

这与$p\geqslant 5$矛盾, 故式(2-4)无解.

⑤当$r=5$时,若$p=2$,

$$S(2^{35})=42=2^4\phi\left(\frac{n}{32}\right),$$

这与引理2.4矛盾, 式(2-4)无解.

若$p \geqslant 3$,

$$35p \geqslant S(p^{35}) = p^4(p-1)\phi\left(\frac{n}{p^5}\right),$$

即

$$35 \geqslant p^3(p-1)\phi\left(\frac{n}{p^5}\right),$$

这与$p \geqslant 3$矛盾, 故式(2-4)无解.

⑥当$r \geqslant 6$时,若$p = 2$,

$$S(2^{7r}) = 2^{r-1}\phi\left(\frac{n}{2^r}\right),$$

即要$2^{r-1}|S(p^{7r})$, 由Smarandache函数的定义和引理2.5、2.6 可知, 这不可能成立, 所以式(2-4)无解.

若$p \geqslant 3$,则

$$7rp \geqslant S(p^{7r}) = p^{r-1}(p-1)\phi\left(\frac{n}{p^r}\right),$$

即

$$7r \geqslant p^{r-2}(p-1)\phi\left(\frac{n}{p^r}\right) \geqslant p^{r-2}(p-1),$$

由引理2.7可知,这不可能成立, 所以式(2-4)无解.

综上所述: 当$k = 7$时, 方程$\phi(n) = S(n^k)$仅有解$n = 1, 80$.因此完成了定理2.2的证明.

2.3 一类包含Smarandache函数和Euler函数的方程II

对于正整数n, 设Smarandache函数为$S(n)$, $\phi(n)$是Euler函数, 本节继续阐述包含Smarandache函数和Euler函数的方程

$$\phi(n) = S(n^k)$$

的解. 在上一节中, 已经给出了方程(2-3)在$k = 7$时的全部解, 本节将在此基础上给出方程(2-3)在$k \geqslant 8$时的求解过程以及方程解的个数问题. 即有如下几个定理.

定理 2.3 当$k = 8$时, 方程(2-3)仅有解$n = 1, 125, 250, 289, 578$.

定理 2.4 当$k = 9$时, 方程(2-3)仅有解$n = 1, 361, 722$.

定理 2.5 当$k \geqslant 10$时, 方程(2-3)仅存在有限个正整数解.

定理 2.6 若$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$是正整数$n$的标准分解式, 且

$$S(p^{kr}) = \max\{S(p_1^{k\alpha_1}), S(p_2^{k\alpha_2}), \cdots, S(p_s^{k\alpha_s})\},$$

则当$p \geqslant 2k+1$且$k \geqslant 1, r \geqslant 2$时, 方程(2-3)无解; 当$2k+1$为素数时, 方程(2-3) 仅有2个解, 且$n = 2p^2$.

下面来一一给出以上定理的证明. 首先定理2.3的证明. 把$k = 8$代入方程(2-3)可得,

$$\phi(n) = S(n^8). \tag{2-8}$$

显然$n = 1$是式(2-8)的解.以下主要讨论当$n > 1$时的情祝.

设$n > 1$且$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$是正整数$n$的标准分解式, 则由引理2.6有

$$S(n^8) = \max\{S(p_1^{8\alpha_1}), S(p_2^{8\alpha_2}), \cdots, S(p_k^{8\alpha_k})\} = S(p^{8r}) \tag{2-9}$$

由引理2.3可知,

$$\phi(n) = \phi\left(p^r\right) \phi\left(\frac{n}{p^r}\right) = p^{r-1}(p-1)\phi\left(\frac{n}{p^r}\right). \tag{2-10}$$

联立(2-8)-(2-10)式可得,

$$p^{r-1}(p-1)\phi\left(\frac{n}{p^r}\right) = S(p^{8r}). \tag{2-11}$$

①当$p = 2, r = 1$时,由(2-11)可知

$$\phi\left(\frac{n}{2}\right) = S(2^8) = 10, \tag{2-12}$$

由(2-12)式可推得$\phi\left(\frac{n}{2}\right) > 1$. 则$n$必含奇素因子$q$,且得到

$$S\left(q^8\right) = \begin{cases} 18, & q = 3 \\ 35, & q = 5 \\ 49, & q = 7 \\ 8q, & q > 7 \end{cases} \tag{2-13}$$

所以(2-9)式和(2-12)式矛盾. 故当$p = 2, r = 1$时, 式(2-8)无解.

而$\phi(32) = 2^5 - 2^4 = 16 \neq S(32^7)$, 故$n = 32$不是式(2-8)的解.

②当$p = 2, r = 2$时, 由(2-11)可知$2\phi(\frac{n}{4}) = S(2^{16}) = 18$, 即$\phi(\frac{n}{4}) = 9$, 与引理2.4矛盾, 所以当$p = 2, r = 2$时, 式(2-8)无解.

同理可证,当$p = 2, r = 3, 4, 5, 6, 7, 8$时, 式(2-8)无解.

当$p = 2, r > 8$时, 由引理2.6有

$$8r \geqslant \frac{1}{2}S(2^{8r}) = \frac{1}{2}2^{r-1}\phi\left(\frac{n}{2^r}\right) = 2^{r-2}\phi\left(\frac{n}{2^r}\right) \geqslant 2^{r-2} = \frac{1}{4}2^r,$$

即$32r \geqslant 2^r$, 矛盾. 所以当$p = 2, r > 8$时, 式(2-8)无解.

③当$p = 3, r = 1$时, 由(5)式可知$2^2\phi\left(\frac{n}{3}\right) = S\left(3^8\right) = 18$, 即$\phi\left(\frac{n}{3}\right) = 9$, 与引理2.4矛盾,所以当$p = 3, r = 1$时, 式(2-8)无解.

同理可证,当$p=3, r=2,3,4$时,式(2-8)无解.

当$p=3, r\geqslant 5$时, 由引理2.6有

$$8r\geqslant \frac{1}{3}S(2^{8r})=\frac{2}{3}3^{r-1}\phi\left(\frac{n}{3^r}\right)=2\cdot 3^{r-2}\phi\left(\frac{n}{3^r}\right)\geqslant 2\cdot 3^{r-2}>2e^{r-2}>$$
$$2\left(1+(r-2)+\frac{1}{2}(r-2)^2+\frac{1}{6}(r-2)^3+\frac{1}{24}(r-2)^4+\frac{1}{120}(r-2)^5\right)>8r,$$

矛盾.所以当$p=3, r\geqslant 5$时,式(2-8)无解.

④当$p=5, r=1$时, 由(2-11)式可知$4\phi\left(\frac{n}{5}\right)=S(5^8)=35$,矛盾,故式(2-8)无解.

当$p=5, r=2$时,$20\phi\left(\frac{n}{25}\right)=S(5^{16})=70$, 即$2\phi(\frac{n}{25})=7$, 矛盾, 故式(2-8)无解.

当$p=5, r=3$时,$100\phi(\frac{n}{125})=S(5^{24})=100$, 即$\phi\left(\frac{n}{125}\right)=1$, 所以$n=125,250$,而

$$\phi(125)=\phi(5^3)=100=S(5^{24})=S(125^8),$$

$$\phi(250)=\phi(2\cdot 5^3)=100=S(5^{24})=S(250^8),$$

故$n=125,250$是式(2-8)得解.

当$p=5, r=4$时, 因为$5^3\cdot 4\phi\left(\frac{n}{625}\right)>S(5^{32})=130$,所以式(2-8)无解. 同理可得当$p=5, r>4$时, 式(2-8)也无解.

⑤当$p=7, r=1$时,由(2-11)式可知$6\phi\left(\frac{n}{7}\right)=S(7^8)=49$,矛盾,故式(2-8)无解.

同理可得当$p=7, r=2$时, (2-8)式无解.而当$p=7, r=3$时,因为

$$7^2\cdot 6\phi\left(\frac{n}{243}\right)>S(7^{24})=147,$$

所以(2-8)式无解;当$p=7, r>3$时, 式(2-8)无解; 当$p=11,13, r\geqslant 1$时, 式(2-8)无解.

⑥当$p=17, r=1$时,由(2-11)式可知$16\phi\left(\frac{n}{17}\right)=S\left(17^8\right)=17\cdot 8$,矛盾,故式(2-8)无解.

当$p=17, r=2$时,有$17\cdot 16\phi\left(\frac{n}{17^2}\right)=S\left(17^{16}\right)=17\cdot 16$,即$\phi\left(\frac{n}{289}\right)=1$,故$n=289,578$,而

$$\phi(289)=\phi\left(17^2\right)=272=S\left(17^{16}\right)=S(289^8),$$
$$\phi(578)=272=S\left(17^{16}\right)=S\left(578^8\right),$$

故$n=289,578$是式(2-8)的解.

当$p=17, r\geqslant 3$时, 由于$17^{r-1}\cdot 16\phi\left(\frac{n}{17^r}\right)>S\left(17^{8r}\right)$,所以式(2-8)无解.

⑦当$p=19, r=1$时,有$18\phi\left(\frac{n}{19}\right)=S\left(19^8\right)=8\cdot 19$,矛盾,所以式(2-8)无解.

同理,当$p=19, r=2,3$时,式(2-8)无解;当$p=19, r\geqslant 4$时, $19r\geqslant 19^{r-2}18\phi(\frac{n}{19^r})\geqslant 18\cdot 19^{r-2}$,矛盾. 故式(2-8)无解.

⑧当$p>19, r=1$时,有$(p-1)\phi(\frac{n}{p})=S(p^8)=8\cdot p$,因为$(p,p-1)=1$, 且若

有$\frac{8p}{p-1}=2k(k\in N^{+})$, 即$p=\frac{k(p-1)}{4}$, 矛盾.所以式(2-8)无解.

当$p>19, r\geqslant 2$时,由引理2.6有

$$8r\geqslant p^{r-2}(p-1)\phi\left(\frac{n}{p^r}\right)\geqslant 22\cdot 23^{r-2},$$

显然矛盾.故式(2-8)无解.

综上所述可得:当$k=8$时,式(2-8)仅有解$n=1,125,250,289,578$.这样就证明了定理2.3.

同理,用相似的方法可以证明定理2.4也成立.

下面证明定理2.5. 对任意给定的正整数k,设$n>1$, 且$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$是正整数$n$的标准分解式, 由$S(n)$的定义可知

$$S(n^k)=\max\{S(p_1^{k\alpha_1}),S(p_2^{k\alpha_2}),\cdots,S(p_s^{k\alpha_s})\}=S(p^{kr}).$$

又因

$$\phi(n)=\phi(p^r)\phi\left(\frac{n}{p^r}\right)=p^{r-1}(p-1)\phi\left(\frac{n}{p^r}\right), \tag{2-14}$$

故由方程(2-3)可得

$$p^{r-1}(p-1)\phi\left(\frac{n}{p^r}\right)=S\left(p^{kr}\right). \tag{2-15}$$

而

$$p\leqslant S(p^{kr})\leqslant krp.$$

若$p^{r-1}(p-1)\phi(\frac{n}{p^r})=krp$,则由$\phi(n)$的定义及性质可得$p^{r-1}(p-1)|krp$,即$p^{r-2}(p-1)|kr$.令$y=p^{r-2}(p-1)-kr$, p为给定的素数,y是r的函数.则

$$y'=(p-1)p^{r-2}\ln p-k.$$

当$p>2k+1$且$r\geqslant 2$时,可得$y'>0$,故此时y是单调递增的,且易得$y>0$.

所以式(2-15)当$p>2k+1$且$r\geqslant 2$时无解.即仅存在有限个正整数n能使得式(2-13)成立.

最后, 可以由引理2.2-2.6,结合定理2.4、定理2.5的证明方法推出定理2.6也成立.

2.4 关于伪Smarandache函数的猜想

Smarandache函数是由F.Smarandache教授在≪ Only Problems Not Solutions ≫一书中引进的, 其定义为$S(n)=\min\{m:n|m!\}$.后来人们依据Smarandache函数定义了伪Smarandache 函数$Z(n)=\min\left\{m:n|\frac{m(m+1)}{2}\right\}$.它们有许多有趣的性质, 许多人曾对

此进行过研究.

Erdös[15]曾经猜测对于几乎所有的n都有$S(n) = P(n)$,其中$P(n)$是指n的最大素因子函数. 对于这个猜测目前所获得的最好结果是Aleksandar Ivic[25]得到的, 他证明了

$$N(x) = x\exp\left\{-\sqrt{2\log x\log\log x}\left(1+O\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right)\right)\right\},$$

这里$N(x)$表示所有不超过x的整数中不满足方程$S(n) = P(n)$的整数的个数.Mark Farris和Patrick Mitchell[26]研究了Smarandache函数$S(n)$在素数幂上的上下界估计, 并得到了如下结果:

$$(p-1)\alpha \leqslant S(p^\alpha) \leqslant (p-1)(\alpha+1+\log_p^\alpha)+1;$$

Jozsef Sandor[27]研究了包含Smarandache函数不等式的可解性, 证明了

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k) < S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

$$\text{和 } S(m_1+m_2+\cdots+m_k) > S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

存在无穷多解. Lu Yaming[28]进一步证明了在等号成立下上述方程也存在无穷多组解.

关于$S(n)$和$Z(n)$还有许多性质尚不清楚, 特别是$Z(n)$由于其值的分布的不规则性使得研究起来具有很大的困难.张文鹏在[29]中提出下列问题:是否最多只有有限个正整数使得$\sum_{n|d}\frac{1}{S(d)}$为正整数; 函数$Z(n)$的均值是多少? Majumdar在[30]中提出了以下四个猜想:

(1)$Z(n) = 2n-1$当且仅当$n = 2^k$,其中k为非负整数;

(2)$Z(n) = n-1$当且仅当$n = p^k$,其中p为大于3的素数;

(3)如果n不能表达为$n = 2^k$的形式, 则有$Z(n) \leqslant n-1$;

(4)对任意的n都有$Z(n) \neq Z(n+1)$.

本节将主要阐述以上问题的解答, 不但对于张文鹏所提出的问题给出了一定解答, 还得到Majumdar所提出的四个猜想是正确的. 为了说明猜想的正确性, 先给出下面几个引理.

引理 2.8 若$S(n) = P(n)$,设n的标准分解$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}P^{\alpha_{r+1}}(n)$, 那么必有$\alpha_{r+1} = 1$;对于$1 \leqslant k \leqslant r$,必有$\alpha_k \leqslant P(n)-2$.

证明: 若$\alpha_{r+1} > 1$, 则有$P^2(n)|n$,而$n|S(n)! = P(n)!$,则$P^2(n)|P(n)!$.这与$P(n)$为素数矛盾.故有$\alpha_{r+1} = 1$.

设$n!$中包含素因子p的个数为α,即满足$p^\alpha|n!$, $p^{\alpha+1}\nmid n!$,则有$\alpha = \sum_{l=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^l}\right]$(证明参

见[31]). 由于有$p_k^{\alpha_k}|P(n)!$,因此有

$$\alpha_k \leqslant \sum_{l=1}^{\infty}\left[\frac{P(n)}{p_k^l}\right] \leqslant \sum_{l=1}^{\infty}\frac{P(n)}{p_k^l} = \frac{P(n)}{p_k-1},$$

因此当$p_k \neq 2$时是显然有$\alpha_k \leqslant P(n)-2$; 而当$p_k=2$时, 则有$t$使得$2^t < P(n) < 2^{t+1}$,此时有

$$\alpha_k \leqslant \sum_{l=1}^{t}\left[\frac{P(n)}{2^l}\right] \leqslant \sum_{l=1}^{t}\frac{P(n)}{2^l} = P(n)-P(n)\frac{2}{2^{t+1}} < P(n)-1,$$

因为α_k为整数因此有$\alpha \leqslant P(n)-2$.

为了更加方便的研究$Z(n)$, 定义一个新的函数$Z^*(n)=\min\{m : n|m(m+1)\}$, 显然容易得到当$n$为奇数时$Z(n)=Z^*(n)$,当$n$为偶数时$Z(n)=Z^*(2n)$, 因此这两个函数是密切相关的.下面给出关于函数$Z^*(n)$的性质.

引理 2.9 当$n=p^k$时, $Z^*(n)=n-1$; 当n含有两个以上不同的素因子时, 则必有$Z^*(n) \leqslant \frac{n}{2}-1$.

证明:由$Z^*(n)$的定义易知$Z^*(n) \leqslant n-1$, 而当$n=p^k$时有$p^k|Z^*(n)(Z^*(n)+1)$, 故有

$$p^k|Z^*(n)$$

或

$$p^k|Z^*(n)+1,$$

此时都可以得到$Z^*(n) \geqslant p^k-1=n-1$,故此时有$Z^*(n)=n-1$.

当n含有两个以上不同的素因子时, 此时n必可分解为两个互素且大于1的整数的乘积, 设$n=mk$,其中$(m,k)=1$,此时可设k为奇数, 则必定存在且唯一存在b,b'属于k的最小非负剩余系使得$mb \equiv -l \bmod k$且$mb' \equiv l \bmod k$, 因此必有$Z^*(n) \leqslant \min\{mb, mb'-1\}$.而注意到$k|(mb+mb')$,因此有$k|(b+b')$,故有$b+b'=k$,由于$k$为奇数, 故必有$\min\{b,b'\} \leqslant \frac{(k-1)}{2}$,因此

$$Z^*(n) \leqslant m\frac{k-1}{2} = \frac{n}{2}-\frac{m}{2} \leqslant \frac{n}{2}-1.$$

由以上的引理可以得到下面几个定理.

定理 2.7 令

$$f(n)=\sum_{d|n}\frac{1}{S(d)},$$

那么在$n \leqslant x$的整数中除去$N(x)$个整数外, $f(n)$均不取整数值, 其中

$$N(x)=x\exp\left\{-\sqrt{2\log x\log\log x}\left(1+O\left(\frac{\log\log\log x}{\log\log x}\right)\right)\right\},$$

即$f(n)$在几乎所有的整数上都不取整数值.

证明:由Aleksandar Ivic[25]的结果, 只需证明当$S(n)=P(n)$时, $f(n)$不为整数.

若$S(n)=P(n)$,由引理2.8知, 可设n的标准分解为$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}P(n)$, 其中$\alpha_k\leqslant P(n)-2$,将$n$记为$n=mP(n)$,所以此时有

$$\begin{aligned}f(n)&=\sum_{d|n}\frac{1}{S(d)}=\sum_{d|m}\frac{1}{S(d)}+\sum_{d|m}\frac{1}{S(dP(n))}\\&=\sum_{d|m}\frac{1}{S(d)}+\sum_{d|m}\frac{1}{P(n)}\\&=\sum_{d|m}\frac{1}{S(d)}+\frac{\prod_{k=1}^{r}(\alpha_k+1)}{P(n)}.\end{aligned}$$

只需注意到对于$d|m$, $S(d)<S(n)=P(n)$, $\alpha_k+1\leqslant P(n)-1<P(n)$, 因此对于第一部分, 将其通分后, 其分母的素因子皆小于$P(n)$,对于第二部分其分子的素因子也皆小于$P(n)$,因此其肯定不是整数, 因此这两部分相加不可能成为整数.定理2.7得证.

定理 2.8 (i)$Z(n)=2n-1$当且仅当$n=2^k$, 其中k为非负整数;

(ii) $Z(n)=n-1$当且仅当$n=p^k$, 其中p为大于2的素数;

(iii)如果n不能表达为$n=2^k$的形式, 则有$Z(n)\leqslant n-1$.

证明:(i)当$n=2^k$时(仅考虑k为正整数, $k=0$是显然的), 此时有$Z(n)=Z^*(2n)$,故由引理2.9可知$Z(n)=2n-1$; 若$Z(n)=2n-1$,必有n为偶数, 否则$Z(n)=Z^*(n)\leqslant n-1$, 假设$n\neq 2^k$,故$2n$至少还含有一个奇素因子, 由引理2.9可得$Z(n)=Z^*(2n)\leqslant\frac{2n}{2}-1=n-1$, 矛盾, 故$n=2^k$.

(ii)当$n=p^k$, 且p为大于2的素数时, 此时有$Z(n)=Z^*(n)$, 由引理2.9可得$Z(n)=n-1$; 若$Z(n)=n-1$,显然n不可能是偶数, 假设$n\neq p^k$,则n至少含有两个奇素因子, 由引理2.7可得$Z(n)=Z^*(n)\leqslant\frac{n}{2}-1$,矛盾, 故有$n=p^k$, 且$p$为大于2的素数.

(iii)若n不能表达为$n=2^k$的形式, 则必有n为奇数, 此时有$Z(n)=Z^*(n)\leqslant n-1$, 或则n为偶数且至少含有一个奇素因子, 由引理2.9可知此时有

$$Z(n)=Z^*(2n)\leqslant\frac{2n}{2}-1=n-1.$$

定理 2.9 对任意的n都有$Z(n)\neq Z(n+1)$.

证明:假设有n使得$Z(n)=Z(n+1)=m$,则存在k,k'使得$nk=(n+1)k'=\frac{m(m+1)}{2}$,由于$(n,n+1)=1$,因此有$n+1|k,n|k'$, 因此有$n+1\leqslant k$, $n\leqslant k'$,故可得知$\frac{m(m+1)}{2}\geqslant n(n+1)$, 故有$m>n+1$,由定理2.8可知则必有$n=2^t$, $n+1=2^{t'}$,故只能是$n=1$, 此时显然有$Z(1)\neq Z(2)$.

定理 2.10 对任意的$x \geqslant 1$, 有

$$x^2\sum_{j=1}^{J}\frac{a_j}{\log_x^j}+O\left[\frac{x^2}{\log_x^{J+1}}\right]\leqslant\sum_{n\leqslant x}Z(n)\leqslant\frac{3}{8}x^2+O\left[\frac{x^2}{\ln_x}\right],$$

其中$a_j=\frac{\zeta(j+1)}{2}$.

证明: 首先证明不等式右半部分:由定理2.8可知, 当$n=2^k$时, $Z(n)=2n-1$,当$n=p^k$时, $Z(n)=p^k-1$, 当n为含有奇素数因子的偶数时, $Z(n)\leqslant n-1$; 当n为含有2个以上的奇素数因子的奇数时有$Z(n)\leqslant\frac{(n-1)}{2}$, 因此可得

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}Z(n)=&\sum_{k\leqslant[\frac{x}{2}]}Z(2k)+\sum_{k\leqslant[\frac{x}{2}]}Z(2k+1)+O(x)\\ \leqslant&\sum_{k\leqslant[\frac{x}{2}]}2k-1+\sum_{k\leqslant[\frac{x}{2}]}k+\sum_{p\leqslant x}\frac{p-1}{2}+\sum_{k\leqslant\ln x}2^k+O(x)\\ =&3\sum_{k\leqslant[\frac{x}{2}]}k+\sum_{p\leqslant x}\frac{p-1}{2}+\sum_{k\leqslant\ln x}2^k+O(x)\\ =&\frac{3}{8}x^2+O\left(\frac{x^2}{\ln x}\right).\end{aligned}$$

下面证明定理的左半部分: 因为$P(n)|n\left|\frac{Z(n)(Z(n)+1)}{2}\right.$,故有$P(n)|Z(n)(Z(n)+1)$, 所以$Z(n)\geqslant P(n)-1$,因此可得:

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}Z(n)\geqslant&\sum_{n\leqslant x}(P(n)-1)\\ =&\sum_{n\leqslant x}P(n)+O(x)\\ =&x^2\sum_{j==1}^{J}\frac{a_j}{\log_x^j}+O\left(\frac{x^2}{\log_x^{J+1}}\right).\end{aligned}$$

最后一步参见文献[25].

2.5 关于Smarandache函数与伪Smarandache函数的方程I

2.5.1 背景及现状

对任意正整数n著名的F. Smarandache函数$S(n)$定义为最小的正整数m使得$n|m!$ 即$S(n)=\min\{m: m\in N, n|m!\}$. 从$S(n)$的定义人们容易推出如果$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$表示$n$的标准分解式, 那么$S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$. 由此不难计算出$S(1)=1$, $S(2)=2$, $S(3)=3$, $S(4)=4$, $S(5)=5$, $S(6)=3$, $S(7)=7$, $S(8)=4$, $S(9)=6$, $S(10)=5$, $S(11)=1$, $S(12)=4$, $S(13)=13$, $S(14)=7$, $S(15)=5$, $S(16)=6\cdots$.关于$S(n)$的

算术性质, 许多学者进行了研究, 获得了不少有趣的结果[7,27,28,33,36]. 例如, Lu Yaming研究了一类包含$S(n)$方程的可解性[28], 证明了该方程有无穷多组正整数解, 即证明了对任意正整数$k \geqslant 2$方程

$$S(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) = S(m_1) + S(m_2) + \cdots + S(m_k)$$

有无穷多组正整数解$(m_1, m2, \cdots, m_k)$.

Jozsef Sandor[27]进一步说明对任意正整数$k \geqslant 2$, 存在无穷多组正整数

$$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$$

满足不等式

$$S(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) > S(m_1) + S(m_2) + \cdots + S(m_k).$$

同时, 又存在无穷多组正整数$(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)$满足不等式

$$S(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) < S(m_1) + S(m_2) + \cdots + S(m_k).$$

此外, 徐哲峰[36]获得了有关$S(n)$的一个深刻结果[36]. 即证明了渐近公式

$$\sum_{n \leqslant x} (S(n) - P(n))^2 = \frac{2\zeta(\frac{3}{2}) x^{\frac{3}{2}}}{3 \ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x} \right),$$

其中$P(n)$表示n的最大素因子, $\zeta(s)$表示Riemann Zeta-函数.

现在定义另一个算术函数$Z(n)$为

$$Z(n) = \min \left\{ m : m \in N, n \,\middle|\, \frac{m(m+1)}{2} \right\}.$$

该函数有时也被称为伪Smarandache函数. 关于它的初等性质, 虽然至今知道的不多, 但是也有不少人进行过研究, 获得了一些有价值的理论研究成果[37−39]. 特别在文献[40]的第3章中, Kenichiro Kashihara论述了函数$Z(n)$的一些初等性质, 同时也提出了下面两个问题:

(A)求方程$Z(n) = S(n)$的所有正整数解;

(B)求方程$Z(n) + 1 = S(n)$的所有正整数解.

本节的主要目的是利用初等方法研究方程(A) 及(B)的可解性, 并获得了这两个方程的所有正整数解, 具体地说, 即证明了下面的定理.

定理 2.11 对任意正整数$n > 1$,函数方程

$$Z(n) = S(n)$$

成立当且仅当$n = p \cdot m$, 其中p为奇素数, m为$\frac{p+1}{2}$ 的任意大于1的因数. 即$m | \frac{p+1}{2}$且$m > 1$.

定理 2.12 对任意正整数n,函数方程

$$Z(n)+1=S(n)$$

成立当且仅当$n=p\cdot m$, 其中p为奇素数, m为$\frac{p-1}{2}$ 的任意因数. 即$m|\frac{p-1}{2}$.

显然, 该定理彻底解决了问题(A)及(B). 亦即证明了这两个方程都有无穷多个正整数解, 并给出了它们每个解的具体形式. 其中, 特别在区间$[1,100]$中, 方程$Z(n)=S(n)$有9个解, 它们分别是$n=1,6,14,15,22,28,33,66,91$.对于问题(B), 显然方程$Z(n)+1=S(n)$在区间$[1,50]$中有19 个解, 它们分别是

$$n=3,5,7,10,11,13,17,19,21,23,26,29,31,34,37,39,41,43,47.$$

利用初等方法给出定理的证明.

首先证明定理2.10. 事实上, 当$n=1$时, 方程$Z(n)=S(n)$成立. 当$n=2,3,4,5$时, 显然不满足方程$Z(n)=S(n)$. 于是, 假定$n\geqslant 6$满足方程$Z(n)=S(n)$, 不妨设$Z(n)=S(n)=k$. 由函数$Z(n)$及$S(n)$的定义可知, k是最小的正整数, 使得n满足下面的两个整除式:

$$n\left|\frac{k(k+1)}{2}\right.,\ n|k!. \tag{2-16}$$

首先, 证明在式(2-16)中$k+1$不可能为素数. 事实上如果$k+1$为素数, 不妨设$k+1=p$,于是在$n|\frac{p(p-1)}{2}$中当$(n,p)=1$时, 立刻推出$n|\frac{p-1}{2}$.从而n整除

$$\sum_{i=1}^{p-2} i=\frac{(p-1)(p-2)}{2}.$$

这与$k=p-1$为最小的正整数使得$n|\frac{k(k+1)}{2}$矛盾！当$(n,p)>1$时, 由于p为素数, 所以推出$p|n$. 再由于$n|k!$, 立刻得到$p|k!$. 这是不可能的, 因为$p=k+1$,所以p不可能整除$(p-1)!$, 从而证明了在式(2-16)中$k+1$不可能为素数.

其次, 证明在式(2-16)中当k为奇数时k一定为素数. 事实上当k为奇数时$\frac{k+1}{2}$为整数, 若k为合数, 则当k可以分解成两个不同整数的乘积时, 不妨设$k=a\cdot b$, $a>1$, $b>1$且$a\neq b$. 于是注意到$(k,\frac{k+1}{2})=1$,不难推出$k=a\cdot b|(k-1)!\frac{k+1}{2}|(k-1)!$ 再由于n整除$\frac{k(k+1)}{2}$立刻推出$n|(k-1)!$. 这与k是最小的正整数使得$n|k!$矛盾. 当k为合数且为某一素数的方幂时, 设$k=p^{\alpha}$.由于k为奇数, 所以$p\geqslant 3$, 从而$p,2p,\cdots,p^{\alpha-1}$均小于$k-1$且每个数都整除$(k-1)!$, 于是由n整除$\frac{k(k+1)}{2}$仍然可以推出$n|(k-1)!$. 这与k的定义矛盾, 所以当k为奇数时一定为素数.

结合以上两种情况推出当k为奇数时有$k=p$,此时n整除$\frac{p(p+1)}{2}p!$, 但是当n整除$\frac{p+1}{2}$时,显然有$S(n)<p$;当$n=p$时$Z(n)\neq S(n)$. 所以可以设$n=p\cdot m$, 其中m是$\frac{p+1}{2}$的

任一大于1的因素.

现在证明当$n=p\cdot m$, 其中m是$\frac{p+1}{2}$的任一大于1的因数时, 一定有$Z(n)=S(n)$.事实上此时显然有$S(pm)=S(p)=p$.因为m不整除$\sum\limits_{i=1}^{p-1} i=\frac{p(p-1)}{2}$, 否则与$m$整除$\frac{p+1}{2}$矛盾!所以$Z(pm)=p$, 从而$Z(pm)=S(pm)$.

最后, 证明不存在偶数k使得$Z(n)=S(n)=k$. 用反证法来证明这一结论. 假定存在偶数$k=2m$, 使得$Z(n)=S(n)=k=2m$,则由函数$Z(n)$及$S(n)$的定义可知,n整除$\frac{k(k+1)}{2}=m(2m+1)$ 及$(2m)!$. 由前面的分析可知$2m+1$不可能为素数, 否则当$(n,2m+1)=1$时, n整除$\sum\limits_{i=1}^{2m-1} i=m(2m-1)$, 显然这与$2m$是最小的正整数使得$n$整除$m(2m+1)$矛盾!当$(n,2m+1)>1$时,由素数的性质立刻推出$p=2m+1|n$, 从而再由$n|(2m)!$得到$p=2m+1|(2m)!$, 矛盾!所以$2m+1$不可能为素数, 同样可以证明$m$不可能为合数, 否则容易推出$n|(2m-1)!$, 与$2m$是最小的正整数使得$n|(2m)!$ 矛盾!从而m为素数p, $k=2p$. 于是可得$n|p(2p+1)!$ 及$n|(2p)!$. 但是, 当n等于$p(2p+1)$的任一因素时都是不可能的!也就是说对任意$k|p(2p+1)$, 不可能有$S(k)=2p$. 于是, 完成了定理2.10的证明.

现在证明定理2.11. 与定理2.10的证明方法相似, 这里只给出大概过程. 假定正整数n满足方程$Z(n)+1=S(n)$, 并设$Z(n)+1=S(n)=k$. 于是由函数$Z(n)$及$S(n)$的定义不难推出k是最小的正整数, 使得

$$n\left|\frac{k(k-1)}{2}\right., \ n|k!. \tag{2-17}$$

显然, 式子(2-17)中当k为奇数时一定为素数!否则可难出$n|(k-1)!$, 与k是最小的正整数使得$n|k!$矛盾. 因此$k=p$为一素数. 再由$n|\frac{p(p-1)}{2}$, 并注意$S(\frac{p-1}{2})<p$,立刻推出$n=p\cdot m$,m为$\frac{p-1}{2}$的任一正因数. 容易验证当$n=p\cdot m$,m为$\frac{p-1}{2}$的任一正因数时, n满足方程$Z(n)+1=S(n)$.

当式(2-17)中$k=2m$为偶数时, $k-1=2m-1$一定为素数, 从而可知不存在这样的正整数n使得$Z(n)+1=S(n)=2m$. 所以, 方程$Z(n)+1=S(n)$ 成立当且仅当$n=p\cdot m$, 其中m为$\frac{p-1}{2}$的任一正因数. 于是, 完成了定理2.11的证明.

2.5.2 一些相关问题

关于Smarandache函数$S(n)$及伪Smarandache函数$Z(n)$性质的研究虽然取得了不少进展, 但是仍然存在不少问题. 为了便于有兴趣的读者进行参考和进一步研究, 这里介绍一些与函数$S(n)$及$Z(n)$ 有关的并且有意义的问题.

问题2.1 对任意正整数n,设$H(n)$表示区间$[1,n]$中所有使$S(n)$为素数的正整数的个

数. 试研究$H(n)$的渐近性质. 猜测:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{H(n)}{n}=1.$$

问题2.2 最多有有限个正整数n,使得

$$\sum_{d|n}\frac{1}{S(d)}$$

为整数, 其中$\sum_{d|n}$表示对n的所有正因数求和. 进一步猜测上式为整数当且仅当$n=1,8$.

问题2.3 研究函数$\frac{S(n)}{P(n)}$及$\frac{P(n}{S(n)})$的均值性质, 并给出均值

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{S(n)}{P(n)},\sum_{n\leqslant x}\frac{P(n)}{S(n)}$$

的一个渐近公式, 其中$P(n)$表示n的最大素因子. 当x趋于无穷时, 猜测第一个均值渐近于$c\cdot x$,其中c为某一大于1的常数;第二个均值应该与x同阶. 当然问题2.3与问题2.1密切相关. 如果问题2.1中的猜测正确, 那么就可以获得第二个均值的渐近公式.

问题2.4 函数$Z(n)$的值分布很不规则, 对有些n如$n=\frac{m(m+1)}{2}$, 有$Z(n)=m<\sqrt{2n}$. 而对于另一些n如$n=2^\alpha$, 有$Z(n)=2^{\alpha+1}-1=2n-1$. 因此有必要研究$Z(n)$的均值性质, 给出均值

$$\sum_{n\leqslant x}Z(n),\sum_{n\leqslant x}\ln(Z(n)),\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{Z(n)}$$

的一个渐近公式.

问题2.5 求方程$Z(n)=\phi(n)$的所有正整数解, 其中$\phi(n)$为Euler函数. 这一方程有无限多个正整数解, 例如n为素数p时均满足方程. 当$n=2p$且$p\equiv 1(\bmod 4)$时, n也满足该方程. 除了这些平凡解外, 是否还有其他正整数解是一个公开的问题. 猜测该方程只有$n=1$以及上述两种解.

问题2.6 求方程$S(Z(n))=Z(S(n))$的所有正整数解. 猜测该方程最多有有限个正整数解.

2.6 关于Smarandache函数与伪Smarandache函数的方程II

对任意正整数n,著名的F.Smarandache函数$S(n)$定义为最小的正整数m使得$n|m!$, 即$S(n)=\min\{m: m\in N, n|m!\}$, 此函数是著名数论专家F.Smarandache在《Only Problems,Not Solutions》一书中引入的, 并建议人们研究它的性质. 从$S(n)$ 的定义容易推出:如果$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示n的标准分解式, 那么$S(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$.由此也不难计算出$S(n)$的前几个值为:$S(1)=1,S(2)=2S(4)=4,S(5)=5,S(6)=3,S(7)=$

$7, S(8) = 4, S(9) = 6, S(10) = 5, S(11) = 11, S(12) = 4, S(13) = 13, S(14) = 7, S(15) = 5, S(16) = 6, \cdots$.关于$S(n)$的各种算术性质, 许多学者进行了研究, 获得了不少有趣的结果, 参阅文献[7,27,28,33]. 例如在文献[36]中, 研究了和式

$$\sum_{d|n} \frac{1}{S(d)} \tag{2-18}$$

为整数的问题, 并证明了下面3个结论:

(a)当n为无平方因子数时, (2-18)式不可能是正整数;

(b)对任意奇素数p及任意正整数α, 当$n = p^\alpha$且$\alpha \leqslant p$时, (2-18)式不可能是正整数;

(c)对于任意正整数n,当n的标准分解式为$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \cdot p_k$且$S(n) = p_k$时, (2-18)式不可能是正整数.

此外, 在文献[27]中, J. Sandor引入了伪F. Smarandache函数$Z(n)$如下: $Z(n)$定义为最小的正整数m, 使得n整除$\frac{m(m+1)}{2}$, 即

$$Z(n) = \min\left\{ m : m \in N, n \left| \frac{m(m+1)}{2} \right.\right\}.$$

从$Z(n)$的定义容易推出$Z(n)$的前几个值为: $Z(1) = 1, Z(2) = 3, Z(3) = 2, Z(4) = 7, Z(5) = 4, Z(6) = 3, Z(7) = 6, Z(8) = 15, Z(9) = 8, Z(10) = 4, Z(11) = 10, Z(12) = 8, Z(13) = 12, Z(14) = 7, Z(15) = 5, Z(16) = 31, \cdots$.关于$Z(n)$ 的算术性质, 许多学者也进行了研究, 获得了不少有趣的结果, 参阅文献[38 − 41]. 本节的主要目的是研究函数方程

$$Z(n) + S(n) = kn \tag{2-19}$$

的可解性, 其中k为任意正整数, 并利用初等及组合方法获得了这一方程的所有正整数解. 具体地说也就是证明了下面的定理:

定理 2.13 当$k = 1$时, $n = 6, 12$是方程(2-19)仅有的两个特殊正整数解; 而此时其它正整数n满足方程(2-19)当且仅当$n = p \cdot u$或者$n = p \cdot 2^\alpha \cdot u$, 其中$p \geqslant 7$为素数, $2^\alpha | p-1$, u是$\frac{p-1}{2^\alpha}$的任意一个大于1的奇数因子.

定理 2.14 当$k = 2$时, $n = 1$是方程(2-19)的一个特殊解; 其它正整数n满足方程(2-19)当且仅当$n = p \cdot u$,其中$p \geqslant 5$为素数,u是$\frac{p-1}{2}$的任意一个偶数因子.

注意到, $Z(n) \leqslant 2n-1$及$S(n) \leqslant n$, 所以当$k > 2$时, 方程(2-19)没有正整数解. 从定理很容易联想到Fermat素数, 即形如式$F_n = 2^{2^n}+1$的素数, 其中$n \geqslant 1$为整数. 例如$F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257$等等. 由定理2.13不难推出下面的推论:

推论2.1 当$k = 1$时, 如果n含有Fermat素因子, 则n不可能满足方程(2-19).

利用初等及组合方法来完成定理的证明. 首先证明定理2.13. 这时$k=1$. 注意到$Z(1)+S(1)=2\neq 1, Z(2)+S(2)=5\neq 3, Z(3)+S(3)=5\neq 3, Z(4)+S(4)=11\neq 4, Z(5)+S(5)=9\neq 5, Z(6)+S(6)=6$,所以$n=1,\cdots,5$不满足方程(2-19). $n=6$满足方程(2-19). 于是当其它n满足方程(2)时一定有$n\geqslant 7$.设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$为$n$ 的标准分解式, 此时由F.Smarandache函数的性质知

$$S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}\equiv S(p^{\alpha})=u\cdot p,$$

其中p为某一p_i, α为某一$\alpha_i, u\leqslant\alpha$.

现在注意到$p|n$及$S(n)=u\cdot p$,所以可设$n=p^{\alpha}\cdot n_1$,当n满足方程(2-19)时有

$$Z(n)+u\cdot p=p^{\alpha}\cdot n_1. \tag{2-20}$$

首先证明在(2-20)式中$\alpha=1$. 否则假定$\alpha\geqslant 2$, 于是由(2-20)式立刻推出$p|Z(n)=m$.由$Z(n)=m$ 的定义知$n=p^{\alpha}\cdot n_1$整除$\frac{m(m+1)}{2}$, 而$(m,m+1)=1$,所以$p^{\alpha}|m$.从而由(2-20)式推出$p^{\alpha}|S(n)=u\cdot p$, 即$p^{\alpha-1}|u$,从而$p^{\alpha-1}\leqslant u$.但是另一方面, 注意到$S(n)=S(p^{\alpha})=u\cdot p$, 由F.Smarandache函数$S(n)$的性质知$u\leqslant\alpha$,所以$p^{\alpha-1}\leqslant u\leqslant\alpha$. 此式对奇素数$p$显然不成立. 如果$p=2$, 则当$\alpha\geqslant 3$时, $p^{\alpha-1}\leqslant u\leqslant\alpha$ 也不成立. 于是只有一种可能:$u=a=2$. 注意到$n\geqslant 5$以及$S(n)=4$,所以此时只有一种可能:$n=12$,而$n=12$是方程(2)的一个解. 所以如果其它正整数n满足方程(2-19),则(2-20)式中必有$S(n)=p,\alpha=u=1$.在这种情况下, 令$Z(n)=m=p\cdot v$, 则(2-20)式成为

$$v+1=n_1,$$

或者$n_1=v+1$,即$n=p\cdot(v+1), Z(n)=p\cdot v$. 再由$Z(n)$的定义知$n=p\cdot(v+1)$整除

$$\frac{Z(n)(Z(n)+1)}{2}=\frac{pv\cdot(pv+1)}{2},$$

或者$(v+1)$整除

$$\frac{Z(n)(Z(n)+1)}{2}=\frac{v\cdot(pv+1)}{2},$$

注意到$(v+1,v)=1$,所以当v为偶数时由上式立刻推出$v+1|pv+p-p+1$,即$v+1|p-1$或者$v+1|\frac{p-1}{2}$. 显然对$\frac{p-1}{2}$的任意大于1的奇数因子$r, n=p\cdot r$ 是方程(2-19)的解. 因为此时有$Z(p\cdot r)=p\cdot(r-1)$.

当v为奇数时, 由$(v+1)$整除

$$\frac{Z(n)(Z(n)+1)}{2}=\frac{v\cdot(pv+1)}{2},$$

得到

$$(v+1)\left|\frac{pv+1}{2}=\frac{(p-1)(v+1)+v-p+2}{2}\right..$$

由此可推出

$$p-1=(2k+1)\cdot(v+1).$$

于是设$p-1=2^\beta\cdot h$,其中h为奇数, 则$\frac{v+1}{2^\beta}$为小于h的奇数因子. 容易验证对任意奇数$r|h$且$r<h, n=p\cdot 2^\beta\cdot r$ 为方程(2-19)的解. 因为此时有

$$Z(p\cdot 2^\beta\cdot r)=p\cdot(2^\beta\cdot r-1).$$

事实上, 注意到$r|h$. 首先容易推出$p\cdot 2^\beta\cdot r$整除$\frac{m(m+1)}{2}$.于是由$Z(n)$的定义知

$$Z(p\cdot 2^\beta\cdot r)=p\cdot(2^\beta\cdot r-1).$$

于是证明了定理2.13.

现在证明定理2.14. 此时注意到$k=2$, 所以当$n=1$时, 有$Z(1)+S(1)=2$即$n=1$是方程(2-19)的一个解. 如果方程(2-19)还有其它正整数解$n>2$,则由定理2.13的证明方法不难推出$n=p\cdot u$, 其中$p\geqslant 5$为素数, $S(u)<p$. 代入方程(2-19)可得

$$Z(p\cdot u)+S(p\cdot u)=2p\cdot u.$$

由此式立刻推出p整除$Z(p\cdot u)$.设$Z(p\cdot u)=p\cdot v$, 则$v=2u-1$.由$Z(n)$的定义知$p\cdot u$整除$\frac{p(2u-1)(p(2u-1)+1)}{2}$. 从而$u$整除$\frac{p-1}{2}$. 此外, 当$u$为$\frac{p-1}{2}$的任一大于1的奇数因数时, $Z(p\cdot u)=p\cdot(u-1)$, 所以此时$n=p\cdot u$不是方程(2-19)的正整数解; 当u为$\frac{p-1}{2}$的任一偶数因数时有

$$Z(p\cdot u)=p\cdot(2u-1),$$

此时

$$Z(p\cdot u)+S(p\cdot u)=2p\cdot u.$$

于是完成了定理2.14的证明.

由定理2.13不难推出文中的推论. 事实上定理2.13 中的素数不可能是Fermat素数, 因为当p为Fermat 素数时, $p-1$没有大于1的奇数因子.

2.7 关于Smarandache函数与素数

对任意正整数n, 著名的F.Smarandache函数$S(n)$定义为最小的正整数m使得$n\mid m!$.

即就是$S(n) = \min\{m: \ m \in N, \ n|m!\}$. 这一函数是美籍罗马尼亚著名数论专家F.Smarandache教授在他所著的《Only Problems, Not Solutions》一书中引入的, 并建议人们研究它的性质! 从$S(n)$的定义人们容易推出如果$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$表示$n$的标准分解式, 那么$S(n) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$. 由此也不难计算出$S(n)$的前几个值为: $S(1) = 1$, $S(2) = 2$, $S(3) = 3$, $S(4) = 4$, $S(5) = 5$, $S(6) = 3$, $S(7) = 7$, $S(8) = 4$, $S(9) = 6$, $S(10) = 5$, $S(11) = 11$, $S(12) = 4$, $S(13) = 13$, $S(14) = 7$, $S(15) = 5$, $S(16) = 6$, $\cdots\cdots$. 关于$S(n)$的算术性质, 许多学者进行了研究, 获得了不少有趣的结果! 参阅文献[28, 32, 36, 37, 57]. 例如, Lu Yaming[28] 及乐茂华[32]研究了一类包含$S(n)$方程的可解性, 证明了该方程有无穷多组正整数解. 即就是证明了对任意正整数$k \geqslant 2$, 方程

$$S(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) = S(m_1) + S(m_2) + \cdots + S(m_k)$$

有无穷多组正整数解$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$.

徐哲峰[36]获得了有关$S(n)$的一个深刻结果! 也就是证明了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n) - P(n))^2 = \frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中$P(n)$表示n的最大素因子, $\zeta(s)$表示Riemann zeta-函数.

杜凤英[57]研究了关于Smarandache函数的一个猜想, 即就是证明了当n为某些特殊整数(例如n为无平方因子数)时, 和式

$$\sum_{d|n}\frac{1}{S(d)}$$

不可能为整数.

现在令PS(n)表示区间$[1, \ n]$中$S(n)$为素数的正整数n的个数. 在一篇未发表的文献中, J.Castillo建议研究极限$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\dfrac{\mathrm{PS}(n)}{n}$的存在问题. 如果存在, 确定其极限. 这一问题是有趣的, 它揭示了F.Smarandache函数$S(n)$值分布的规律性, 同时也说明在绝大多数情况下, F.Smarandache函数$S(n)$取素数值!

然而关于这一问题, 由于不知道从何下手, 所以至今没有人研究, 至少没有看到过有关方面的论文. 本节的主要目的是利用初等方法研究这一问题, 并得到彻底解决! 具体地说也就是证明了下面的:

定理 2.15 对任意正整数$n > 1$, 有渐近公式

$$\frac{\mathrm{PS}(n)}{n} = 1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

显然这是一个比J.Castillo问题更强的结论. 当然如何改进上式中的误差项也是一个有意义的问题, 有待于进一步研究! 由此定理立刻得到下面的:

推论2.2 对任意正整数n, 有极限

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\mathrm{PS}(n)}{n}=1.$$

这节利用初等方法给出定理的直接证明. 首先估计$n-\mathrm{PS}(n)$的上界. 事实上当$n>1$时, 设$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$表示$n$的标准分解式, 那么由函数$S(n)$的定义及性质可设$S(n)=S\left(p_i^{\alpha_i}\right)=m\cdot p_i$. 若$\alpha_i=1$, 那么$m=1$且$S(n)=p_i$为素数. 若$\alpha_i>1$, 那么$m>1$, 则$S(n)$为合数. 所以$n-\mathrm{PS}(n)$为区间$[1,\ n]$中所有$S(n)=1$及$S(n)$为合数的$n$的个数! 显然$S(n)=1$当且仅当$n=1$. 于是令$M=\ln n$, 则有

$$n-\mathrm{PS}(n)=1+\sum_{\substack{k\leqslant n\\ S(k)=S(p^\alpha),\ \alpha\geqslant 2}}1\leqslant 1+\sum_{S(k)\leqslant M}1+\sum_{\substack{kp^\alpha\leqslant n\\ \alpha p>M,\ \alpha\geqslant 2}}1. \tag{2-21}$$

现在分别估计式(2-21)中的各项, 显然有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{kp^\alpha\leqslant n\\ \alpha p>M,\ \alpha\geqslant 2}}1\leqslant\sum_{\substack{kp^2\leqslant n\\ 2p>M}}1+\sum_{\substack{kp^\alpha\leqslant n\\ \alpha p>M,\ \alpha\geqslant 3}}1\leqslant\sum_{\frac{M}{2}<p\leqslant\sqrt{n}}\ \sum_{k\leqslant\frac{n}{p^2}}1+\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant n\\ \alpha p>M,\ \alpha\geqslant 3}}\ \sum_{k\leqslant\frac{n}{p^\alpha}}1\\
&\ll\sum_{\frac{M}{2}<p\leqslant\sqrt{n}}\frac{n}{p^2}+\sum_{\substack{p^\alpha\leqslant n\\ \alpha p>M,\ \alpha\geqslant 3}}\frac{n}{p^\alpha}\ll\frac{n}{\ln n}+\sum_{\substack{p\leqslant\sqrt{n}\\ \alpha p>M,\ \alpha\geqslant p}}\frac{n}{p^\alpha}+\sum_{\substack{p\leqslant\sqrt{n}\\ \alpha p>M,\ 3\leqslant\alpha<p}}\frac{n}{p^\alpha}\\
&\ll\frac{n}{\ln n}+\sum_{\substack{p\leqslant\sqrt{n}\\ \alpha>\sqrt{M}}}\frac{n}{p^\alpha}+\sum_{\substack{p\leqslant\sqrt{n}\\ p>\sqrt{M},\ \alpha\geqslant 3}}\frac{n}{p^\alpha}\\
&\ll\frac{n}{\ln n}+\frac{n}{2^{\sqrt{M}-1}}+\frac{n}{M}\ll\frac{n}{\ln n}.
\end{aligned}\tag{2-22}$$

对于式(2-21)中的另一项, 需要采取新的估计方法. 对任意素数$p\leqslant M$, 令$\alpha(p)=\left[\frac{M}{p-1}\right]$, 即就是$\alpha(p)$表示不超过$\frac{M}{p-1}$的最大整数. 设$u=\prod\limits_{p\leqslant M}p^{\alpha(p)}$. 对任意满足$S(k)\leqslant M$的正整数$k$, 设$S(k)=S(p^\alpha)$, 则由$S(k)$的定义一定有$p^\alpha|M!$, 从而$\alpha\leqslant\sum\limits_{j=1}^{\infty}\left[\dfrac{M}{p^j}\right]\leqslant\dfrac{M}{p-1}$. 所以所有满足$S(k)\leqslant M$的正整数$k$一定整除$u$, 而这样$k$的个数不会超过$u$的正因数的个数, 即就是$d(u)$. 所以有

$$\begin{aligned}
\sum_{S(k)\leqslant M}1\leqslant\sum_{d|u}1&=\prod_{p\leqslant M}(1+\alpha(p))\\
&=\prod_{p\leqslant M}\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right)\\
&=\exp\left(\sum_{p\leqslant M}\ln\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right)\right),
\end{aligned}\tag{2-23}$$

其中$\exp(y)=e^y$.

由素数定理的两种形式(参阅文献[4]及[6])

$$\pi(M)=\sum_{p\leqslant M}1=\frac{M}{\ln M}+O\left(\frac{M}{\ln^2 M}\right),\quad \sum_{p\leqslant M}\ln p=M+O\left(\frac{M}{\ln M}\right)$$

可得:

$$\begin{aligned}
&\sum_{p\leqslant M}\ln\left(1+\left[\frac{M}{p-1}\right]\right)\leqslant\sum_{p\leqslant M}\ln\left(1+\frac{M}{p-1}\right)\\
&=\sum_{p\leqslant M}\left[\ln\left(p-1+M\right)-\ln p-\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]\\
&\leqslant\pi(M)\cdot\ln(2M)-\sum_{p\leqslant M}\ln p+\sum_{p\leqslant M}\frac{1}{p}\\
&=\frac{M\cdot\ln(2M)}{\ln M}-M+O\left(\frac{M}{\ln M}\right)=O\left(\frac{M}{\ln M}\right).
\end{aligned}\tag{2-24}$$

注意到$M=\ln n$, 由式(2-23)及式(2-24)立刻得到估计式:

$$\sum_{S(k)\leqslant M}1\ll\exp\left(\frac{c\cdot\ln n}{\ln\ln n}\right),\tag{2-25}$$

其中c为一正常数.

注意到$\exp\left(\frac{c\cdot\ln n}{\ln\ln n}\right)\ll\frac{n}{\ln n}$, 于是结合式(2-21), 式(2-22)及式(2-25)立刻推出估计式:

$$n-\mathrm{PS}(n)=1+\sum_{\substack{k\leqslant n\\ S(k)=S(p^\alpha),\ \alpha\geqslant 2}}1=O\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

所以

$$\mathrm{PS}(n)=n+O\left(\frac{n}{\ln n}\right).$$

于是完成了定理的证明.

第三章 与Smarandache函数及伪Smarandache函数相关的一些其它函数

3.1 一类与伪Smarandache函数相关的函数方程

前面给出了Smarandache函数$S(n)$, 其定义为最小的正整数m使得$n|m!$, 即$S(n)=\min\{m: m\in N, n|m!\}$. 从$S(n)$ 的定义容易推出: 如果$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示n的标准分解式, 那么

$$S(n)=\max\{S(p_1^{\alpha_1}),S(p_2^{\alpha_2}),\cdots,S(p_k^{\alpha_k})\}.$$

关于函数$S(n)$的算术性质, 参阅文献[7, 36, 53 − 55, 57]. 在文献[58]中, Sandor引入了Smarandache函数$S(n)$的对偶函数$S^*(n)$, 定义如下, 对于任意正整数n, $S^*(n)$定义为最大的正整数m使得$m!|n$, 即有

$$S^*(n)=\max\{m: m\in N, m!|n\}.$$

关于$S^*(n)$的算术性质也有学者进行过研究, 取得了一系列研究成果. 例如在文献[59]中王妤研究了有关$S^*(n)$的函数方程

$$\sum_{d|n}SL^*(d)=\sum_{d|n}S^*(d)$$

的可解性并得到了一个有趣的结论, 即若

$$A=\left\{n:\sum_{d|n}SL^*(d)=\sum_{d|n}S^*(d), n\in N\right\},$$

则对于任意的实数s, Drichlet级数$f(s)=\sum\limits_{n\geqslant 1, n\in A}\frac{1}{n^s}$在$s\leqslant 1$时发散, 在$s>1$时收敛, 且有恒等式

$$f(s)=\zeta(s)\left(1-\frac{1}{12^s}\right),$$

其中$SL^*(n)$为Smarandache LCM的对偶函数, 且定义为

$$SL^*(n)=\max\{k: [1,2,\cdots,k]|n, k\in N\},$$

$\zeta(s)$表示Riemann zeta函数.

在文献[27], Sandor引入了伪Smarandache函数$Z(n)$定义如下: 对于任意的正整数n,

$Z(n)$为最小的正整数m, 使得$n|\frac{m(m+1)}{2}$, 即

$$Z(n) = \min\left\{m : m \in N, n\left|\frac{m(m+1)}{2}\right.\right\}.$$

从$Z(n)$的定义可以计算出$Z(n)$的前几个值为: $Z(1) = 1, Z(2) = 3, Z(3) = 2, Z(4) = 7, Z(5) = 4, Z(6) = 3, Z(7) = 6, Z(8) = 15, Z(9) = 8, Z(10) = 1, \cdots$. 关于$Z(n)$的算术性质, 许多学者都进行了研究, 获得了不少有意义的结果[4,6,63−68], 同时得到了$Z(n)$一些简单性质:

a)对于任意正整数α及奇素数p, $Z(p^\alpha) = p^\alpha - 1$;

b)对于任意正整数α,$Z(2^\alpha) = 2^{\alpha+1} - 1$.

本节主要介绍关于伪Smarandache函数与Smarandache对偶函数的函数方程

$$Z(n) + S^*(n) - 1 = kn, \quad k \geqslant 1 \tag{3-1}$$

的可解性. 这个问题目前还没有人研究, 张文鹏教授建议研究这一类方程的整数解的情况, 这对进一步研究函数$S^*(n)$与$Z(n)$的性质及它们之间的关系有一定理论基础, 最重要的是可以解决与它相关的级数的敛散性等问题, 得到一些较好的特殊结果, 从而填补这一研究领域的空白. 本节利用初等及组合的方法获得了这个方程的所有正整数解. 亦即证明了下面的定理:

定理 3.1 函数方程(3-1)当$k = 1$时,当且仅当只有唯一的解$n = 1$; 当$k = 2$时, 当且仅当$n = 2^\alpha, \alpha \geqslant 1$满足方程(3-1); 当$k \geqslant 3$时, 方程(3-1)无解.

利用初等及组合的方法可以直接给出定理的证明. 为了简单起见, 不妨设$S^*(n) = m$. 当$k = 1$时, 显然$n = 1$满足方程(3-1). 所以$n = 1$是方程(3-1)的一个解.

下面假定$n > 1$且满足方程(3-1). 由伪Smarandache函数$Z(n)$的定义知

$$Z(n)(Z(n) - 1) + mZ(n) = nZ(n).$$

由此式并结合$Z(n)$的定义立刻可以推出n整除$mZ(n)$, 注意到$m!|n$, 所以可以设$mZ(n) = qn$, 或者$Z(n) = \frac{qn}{m}$. 将此式代人式(3-1)可得$\frac{qn}{m} + m - 1 = n$. 而由$S^*(n) = m$的定义知$m!|n$, 从而可设$n = m! \cdot n_1$, 此时, 上式可化为

$$q(m-1)! \cdot n_1 + m - 1 = m! \cdot n_1. \tag{3-2}$$

在式(3-2)中有两项显然可以被$(m-1)!$整除, 所以由整除的性质易得式(3-2)中的第三项$m - 1$也能被$(m-1)!$整除. 显然$(m-1)!$整除$m - 1$当且仅当$m = 1, 2, 3$. 当$m = 1$时, 由式(3-2)可知$q = 1$, 此时有$Z(n) = n$, 由函数$Z(n)$的定义及性质可得, 没有正整数$n > 1$满足$Z(n) = n$. 当$m = 2$时, 由式(3-1)知$Z(n) = n - 1$且$n > 1$, 此时$n = p^\alpha, \alpha \geqslant 1$, p为奇素数, 但经检验知$n = p^\alpha, \alpha \geqslant 1$不是式(3-1)的解. 当$m = 3$时,

即$S^*(n)=m=3$, 则$n=6$, 经验证$n=6$不满足式(3-1).所以当$k=1$时, 正整数n满足式(3-1)当且仅当$n=1$. 当$k=2$时, 显然$n=1$不满足式(3-1).

同理, 假定$n>1$且满足方程(3-1). 根据$Z(n)$的定义知此时有

$$Z(n)(Z(n)-1)+mZ(n)=2nZ(n).$$

立刻可以推n整除$mZ(n)$, 注意到$m!|n$, 可以设$mZ(n)=q'n$, 或者$Z(n)=\frac{q'n}{m}$. 将此式代入式(3-1)可得$\frac{q'n}{m}+m-1=2n$. 而由$S^*(n)=m$ 的定义知$m!|n$, 从而可设$n=m!\cdot n_2$, 此时上式可化为

$$k(m-1)!\cdot n_2+m-1=2m!\cdot n_2. \tag{3-3}$$

在式(3-3)中有两项显然可以被$(m-1)!$整除, 所以由整除的性质易得式(3-3)中的第三项$m-1$也能被$(m-1)!$整除. 显然$(m-1)!$整除$m-1$当且仅当$m=1,2,3$. 当$m=1$时, 由(3-3)式可知$k=2$, 此时有$Z(n)=2n$, 由函数$Z(n)$的定义及性质可得, 没有正整数$n>1$ 满足$Z(n)=2n$. 当$m=2$时,由(3-1)式知$Z(n)=2n-1$且$n>1$,所以,$n=2^\alpha,\alpha\geqslant 1$是式(3-1)的解. 当$m=3$时,即$S^*(n)=m=3$,则$n=6$, 经验证$n=6$不满足(3-1)式. 综上, 当$k=2$时, 正整数$n$满足(3-1)式当且仅当$n=2^\alpha,\alpha\geqslant 1$.

当$k\geqslant 3$时, 由以上两种情况的证明同理可以推得, 没有正整数$n>1$满足$Z(n)=kn$,和$Z(n)=kn-1$, 且$n=6$也不满足(3-1)式. 故方程(3-1)无解.

综上所述, 便完成了定理3.1的证明.

3.2 关于Smarandache互反函数与伪Smarandache函数的方程

著名的Smarandache函数$S(n)$定义为最小的正整数m使得$n|m!$,即$S(n)=\min\{m: n|m!\}$. 而著名的伪Smarandache函数$Z(n)$定义为满足$\sum\limits_{k=1}^{m}k$能被n整除的最小正整数m,即$Z(n)=\min\{m:n|(m(m+1))/2\}$.例如,$Z(n)$的前几个值为$Z(1)=1,Z(2)=3,Z(3)=2,Z(4)=7,Z(5)=5,Z(6)=3,Z(7)=6,Z(8)=15,Z(9)=9,Z(10)=4,Z(11)=10,Z(12)=8,Z(13)=12,Z(14)=7,Z(15)=5,Z(16)=3,Z(17)=16,Z(18)=8,Z(19)=18,Z(20)=15,\cdots$.

关于函数$S(n)$和$Z(n)$, 许多学者研究了它们的性质, 并得到了一些重要的结果[7,29,69−72]. 在2.5节研究了方程

$$Z(n)=S(n),\quad Z(n)+1=S(n)$$

的可解性, 并给出了方程全部正整数解.

文献[75]了引进了著名的Smarandache互反函数$Sc(n)$,定义为

$$\max\{m : y|n!, 1 < y \leqslant m, (m+1)\dagger n!\}.$$

例如, $Sc(n)$的前几项为$Sc(1) = 1, Sc(2) = 2, Sc(3) = 3, Sc(4) = 4, Sc(5) = 6, Sc(5) = 5, Sc(7) = 10, Sc(8) = 10, Sc(9) = 10, Sc(10) = 10, Sc(11) = 12, Sc(13) = 16, Sc(14) = 16, Sc(15) = 16, \cdots$. 文献[72] 同时研究了$Sc(n)$函数和$Z(n)$函数之间的关系方程

$$Z(n) + Sc(n) = 2n,$$

得到了一些重要的结果, 并提出了下面的猜想.

猜想: 对$n \in N^+$, 方程

$$Sc(n) + Z(n) = 2n$$

成立当且仅当$n = 1, 3^\alpha, p^{2\beta+1}, \alpha$为使得$3^\alpha + 2$为素数且大于等于2的整数, $p \geqslant 5$为素数,β为使得$p^{2\beta+1} + 2$为素数的任一正整数.

本节将给出这个猜想的证明, 即得到了下面的定理.

定理 3.2 当n是奇正整数时, 方程

$$Sc(n) + Z(n) = 2n$$

的解为且只能为$n = 1, 3^\alpha, p^{2\beta+1}, \alpha$为使得$3^\alpha + 2$为素数且大于等于2的正整数, $p \geqslant 5$为素数, β为使得$p^{2\beta+1} + 2$为素数的任一正整数.

定理 3.3 当n是偶数时,分两种情况:

(1)n为2的幂时, n不是方程$Sc(n) + Z(n) = 2n$的解;

(2)n是充分大的偶数, 且n至少有3个不同的素因子时, n不是方程$Sc(n) + Z(n) = 2n$的解.

为了证明定理3.2和定理3.3, 先给出下面几个引理.

引理 3.1 若$Sc(n) = x \in N^+$,且$n \neq 3$,则$x + 1$为大于n的最小素数.

引理 3.2 (1)若$\alpha \in N^+$,则$Z(2^\alpha) = 2^{\alpha+1} - 1$;

(2)若p是不等于2的素数, $\alpha \in N^+$, 则$Z(p^\alpha) = p^\alpha - 1$.

引理 3.3 当$n \in N^+$,且$n \geqslant 59$时, 则有$Sc(n) < 3n/2$.

引理 3.4 当正整数n充分大时, 在n与$n + n^{7/12}$之间必有一个素数.

引理3.1-3.4的证明参见文献[30, 75, 77].

下面证明定理3.2. 当n是奇正整数时, 分6种情况来讨论.

(1)$n=1$满足原方程.

(2)$n=3, Z(3)=2, Sc(3)=3$,故3不是原方程的解.

(3)$n=3^{\alpha}(\alpha\geqslant 2)$,且$3^{\alpha}+2$为素数, 则

$$Sc(3^{\alpha})=3^{\alpha}+1,\quad Z(3^{\alpha})=3^{\alpha}-1,$$

故3^{α}是原方程的解.

(4)$n=3^{\alpha}(\alpha\geqslant 2)$,且$3^{\alpha}+2$不为素数, 则由引理3.1与引理3.2, 有

$$Sc(3^{\alpha})>3^{\alpha}+1,\quad Z(3^{\alpha})=3^{\alpha}-1,$$

故3^{α}不是原方程的解.

(5)$n=p^{\gamma}, \gamma\geqslant 1, p\geqslant 5$为素数, 则

$$Z(p^{\gamma})=p^{\gamma}-1$$

且$n\neq 3$, 这时分2种情况:

①若$n=p^{2\beta}, \beta\geqslant 1$, 则$p\equiv\pm 1(\mathrm{mod}3)$,于是

$$p^{2\beta}\equiv 1(\mathrm{mod}3),$$

从而

$$p^{2\beta}+2\equiv 0(\mathrm{mod}3),$$

则$p^{2\beta}+2$ 不可能为素数, 故由引理3.1, 此时的n不是原方程的解.

②若$n=p^{2\beta+1}$,其中$p\geqslant 5$为素数, β为使得$p^{2\beta+1}+2$ 为素数的任意正整数, 由引理3.1,得

$$Sc(p^{2\beta+1})=p^{2\beta+1}+1.$$

由引理3.2, 得$Z(p^{2\beta+1})=p^{2\beta+1}-1$,则$Sc(p^{2\beta+1})+Z(p^{2\beta+1})=p^{2\beta+1}+1+p^{2\beta+1}-1=2p^{2\beta+1}$,故$n=p^{2\beta+1}$时原方程成立. 若$p^{2\beta+1}+2$不为素数, 则由引理3.1, 得$Sc(p^{2\beta+1})>p^{2\beta+1}$, 知$n=p^{2\beta+1}$不是原方程的解.

(6)$2\dagger n, n=p_1^{\alpha_1}n_1, (p_1,n_1)=1, \alpha_1\geqslant 1, p_1\geqslant 3$ 为素数, 同余方程

$$n_1x\equiv 1(\mathrm{mod}p_1^{\alpha_1})$$

有解, 进而可得同余方程

$$n_1^2x^2\equiv 1(\mathrm{mod}p_1^{\alpha_1})$$

有解, 其解不妨设为y,则可取$1\leqslant y\leqslant p_1^{\alpha_1}-1$,又$p_1^{\alpha_1}-y$亦为前面同余方程的解, 则可

取$1 \leqslant y \leqslant \frac{(p_1^{\alpha_1}-1)}{2}$. 由

$$n_1^2 y^2 \equiv (\mathrm{mod} p_1^{\alpha_1}),$$

则

$$p_1^{\alpha_1} | (n_1 y - 1)(n_1 y + 1),$$

而$(n_1 y - 1, n_1 y + 1) | 2$, 于是$(p_1^{\alpha_1} - 1) | (n_1 y - 1)$或$(p_1^{\alpha_1} - 1) | (n_1 y + 1)$.

若$(p_1^{\alpha_1} - 1) | (n_1 y - 1)$,则$n = p_1^{\alpha_1} n_2 \left| \frac{(n_1 y - 1)(n_1 y)}{2} \right.$, 从而

$$Z(n) = m \leqslant n_1 y - 1 \leqslant \frac{(p_1^{\alpha_1} - 1) n_1}{2} - 1 \leqslant \frac{n}{2},$$

若$(p_1^{\alpha_1} - 1) | (n_1 y + 1)$, 则$n = p_1^{\alpha_1} n_1 \left| \frac{(n_1 y - 1)(n_1 y)}{2} \right.$, 从而

$$Z(n) = m \leqslant n_1 y \leqslant \frac{(p_1^{\alpha_1} - 1) n_1}{2} \leqslant \frac{n}{2}.$$

由引理3.3, 当$n \geqslant 59$时, 则有

$$Sc(n) + Z(n) < \frac{3n}{2} + \frac{n}{2} = 2n,$$

故此时的n不满足原方程. 而当$n < 59$时利用计算机可进行检验这种情况下的n不满足原方程. 综上所述, 定理3.2成立.

下面证明定理3.3. 分以下三种情况.

(1)当$n = 2^\alpha, \alpha \geqslant 1$时,

$$Z(2^\alpha) = 2^\alpha - 1, \quad Sc(2^\alpha) > 1,$$

故$n = 2^\alpha$不满足原方程.

(2)当$n = 2kp^\alpha, \alpha \geqslant 1, (2k, p^\alpha) = 1, p \geqslant 3$为素数时, 同余方程

$$4kx \equiv 1(\mathrm{mod} p^\alpha)$$

有解,可得同余方程

$$16k^2 x^2 \equiv 1(\mathrm{mod} p^\alpha)$$

有解, 其解不妨设为y,则可取$1 \leqslant y \leqslant p^\alpha - 1$,又$p^\alpha - y$亦为前面同余方程的解, 则可取$1 \leqslant y \leqslant \frac{(p^\alpha - 1)}{2}$.由

$$16k^2 y^2 \equiv 1(\mathrm{mod} p^\alpha),$$

则$p^\alpha | (4ky - 1)(4ky + 1)$,而$(4ky - 1, 4ky + 1) = 1$,于是$p^\alpha | (4ky - 1)$或$p^\alpha | (4ky + 1)$.

若$p^\alpha|(4ky-1)$, 则$n=2kp^\alpha\left|\frac{4ky(4ky-1)}{2}\right.$, 从而有

$$Z(n)=m\leqslant 4ky-1\leqslant\frac{4k(p^\alpha-1)}{2}-1\leqslant n-2k-1\leqslant\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)n.$$

若$p^\alpha|(4ky+1)$, 则$n=2kp^\alpha\left|\frac{4ky(4ky+1)}{2}\right.$, 从而有

$$Z(n)=m\leqslant 4ky\leqslant\frac{4k(p^\alpha-1)}{2}\leqslant n-2k\leqslant\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)n.$$

(3)当$n=(2k+1)2^\alpha,\alpha\geqslant 1,k\geqslant 1$时, 则同余方程

$$(2k+1)x\equiv 1(\mathrm{mod}2^{\alpha+1})$$

与

$$(2k+1)x\equiv -1(\mathrm{mod}2^{\alpha+1})$$

均必有解, 且解为奇数, 设α为同余方程

$$(2k+1)x\equiv 1(\mathrm{mod}2^{\alpha+1})$$

的解, 若$1\leqslant\alpha\leqslant 2^\alpha-1$, 则取$\alpha$即可, 否则

$$2^\alpha+1\leqslant\alpha\leqslant 2^{\alpha+1}-1,$$

则

$$2^{\alpha+1}-\alpha\leqslant 2^{\alpha+1}-2^\alpha-1=2^\alpha-1,$$

且$2^{\alpha+1}-\alpha$满足同余方程

$$(2k+1)x\equiv -1(\mathrm{mod}2^{\alpha+1}),$$

故两个同余方程中必有一个满足

$$1\leqslant\alpha\leqslant 2^\alpha-1$$

的解α, 则$2^{\alpha+1}|[(2k+1)\alpha+1]$或$2^{\alpha+1}|[(2k+1)\alpha-1]$.

若$2^{\alpha+1}|[(2k+1)\alpha+1]$,则$2^{\alpha+1}(2k+1)|[(2k+1)\alpha+1](2k+1)$, 从而

$$Z(n)\leqslant\alpha(2k+1)\leqslant(2^\alpha-1)(2k+1)\leqslant\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)n.$$

而当$2^{\alpha+1}|[(2k+1)\alpha-1]$时, 同理也有$Z(n)\leqslant\left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)n$.

总之, 对于(2),(3)两种情况, 即

$$n=2^\alpha p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}(\alpha\geqslant 1,\alpha_i\geqslant 1,k\geqslant 2)$$

为其标准素分解式, 令

$$q^{\gamma}=\min\{2^{\alpha},p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\},$$

则

$$n=2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}>q^{3\gamma},$$

从而$q^{\gamma}<\sqrt[3]{n}$,则

$$Z(n)\leqslant n\left(1-\frac{1}{q^{\gamma}}\right)<n\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)=n-n^{\frac{2}{3}},$$

这样, 当n充分大时, 由引理3.4,

$$Sc(n)+Z(n)<n+n^{\frac{7}{12}}+n-n^{\frac{2}{3}}<2n,$$

即该n不满足原方程. 综上所述, 定理3.3成立.

3.3 关于含伪Smarandache函数及其对偶函数的方程

对任意正整数n著名的伪Smarandache函数$Z(n)$定义为满足$\sum\limits_{k=1}^{m}k$能被n整除的最小的正整数m,即$Z(n)=\min\{m:m\in N^{+},n|\frac{m(m+1)}{2}\}$. 由$Z(n)$的定义容易推出$Z(1)=1,Z(2)=3,Z(3)=2,Z(4)=7,Z(5)=4,Z(6)=3,Z(7)=6,Z(8)=15,Z(9)=8,Z(10)=4,Z(11)=10,\cdots$.许多学者研究了函数$Z(n)$ 的性质, 得到了一些重要的结果和猜想[30,79,80]:

(a)对于任意正整数n,有$Z(n)\geqslant 1$;

(b)对于任意奇素数p和正整数k, 有$Z(p^k)=p^k-1,Z(2^k)=2^{k+1}-1$;

(c)若n为任意合数, 则$Z(n)=\max\{Z(m):m|n\}$.

文献[27]引入了函数$Z(n)$的对偶函数$Z^*(n)$, 将其定义为满足n能被$\sum_{k=1}^{m}k$整除的最大的正整数m, 即$Z^*(n)=\max\left\{m:m\in N^{+},\frac{m(m+1)}{2}|n\right\}$. 例如$Z^*(n)$的前几个值为$Z^*(1)=1,Z^*(2)=1,Z^*(3)=2,Z^*(4)=1,Z^*(5)=1,Z^*(6)=3,Z^*(7)=1,Z^*(8)=1,Z^*(9)=2,\cdots$. 由文献[27, 82], $Z^*(n)$具有如下性质:

(d)两个奇素数p, q若满足$p=2q-1$, 则$Z(pq)=p$; 若$p=2q+1$, 则$Z(pq)=p-1$;

(e)若$n=3^st$(s为任意正整数,t为合数), 则$Z^*(n)\geqslant 2$;

(f)对所有正整数a, b, 有$Z^*(ab)\geqslant\max\{Z(a),Z(b)\}$.

张文鹏建议研究一类包含函数$Z(n)$及其对偶函数$Z^*(n)$的方程

$$Z(n)+Z^*(n)=n \tag{3-4}$$

的可解性, 并提出下面的猜想:

猜想: (A)方程(3-4)只有有限个偶数解. 也许只有一个偶数解$n=6$;

(B)方程(3-4)的所有奇数解必为奇素数p的方幂($p \geqslant 5$).

关于此问题, 文献[83]对其进行了研究, 证明了猜想(B), 并声称猜想(A)仍是公开的问题. 本节将进一步介绍对这两个猜想进行的研究, 利用初等方法和组合方法证实了这两个猜想的正确性, 得到了下面的结论:

定理 3.4 方程(3-4)只有一个偶数解$n = 6$; 方程(3-4)的所有奇数解为$n = p^k$, 且p为素数, k为任意正整数.

证:分两种情况讨论.

1)当n为偶数时, 分以下4种情况来证明:

1.1)当$n = 2^k (k \geqslant 1)$时, 有$Z(2^k) = 2^{k+1} - 1, Z^*(2^k) = 1$.从而$Z(2^k) + Z^*(2^k) \neq 2^k$,故$2^k$不是方程(3-4)的解.

1.2)当$n = 2p$(p为奇素数)时,若$p = 3$,则$Z(6) = 3, Z^*(6) = 3$,从而$Z(6) + Z^*(6) = 6$,故$n = 6$是方程(3-4)的解;若$p = 5$,则$Z(10) = 4, Z^*(10) = 4$,从而$Z(10) + Z^*(10) = 8 \neq 10$, 故$n = 10$不是方程(3-4)的解;若$p > 5$,则$Z^*(2p) = 1$,当且仅当$Z(2p) = 2p - 1$时, 方程(3-4)有解. 则需$2p|\frac{2p(2p-1)}{2}$,由此得到$2p - 1$为偶数, 矛盾.

1.3)当$n = 2^k p^\alpha$(k,α为正整数)时,若2^k与p^α之间存在形如$A = 2B \pm 1$的关系式, 则只能为

$$p^x = 2 \cdot 2^y \pm 1, \tag{3-5}$$

而不可能存在$2^y = 2 \cdot p^x \pm 1$.这里x,y是分别小于α, k的正整数. 事实上, 总会存在不止一对的x和y使得(3-5)式成立. 取满足式(3-5)成立的最大的x和y分别记作如下讨论中的b,d与a,c:

1.3.1)若$p^x = 2 \cdot 2^y - 1$, 则$Z^*(n) = \max\{p^x\} = p^b = 2 \cdot 2^a - 1$.令

$$Z(n) = m = n - Z^*(n) = 2^k p^\alpha - p^b = 2^k p^\alpha - 2 \cdot 2^a + 1,$$

则有

$$2^k p^\alpha \left| \frac{(2^k p^\alpha - p^b)(2^k p^\alpha - 2 \cdot 2^a + 2)}{2} \right. \tag{3-6}$$

当$k = 1$时, 则$a = 1$,可得$p^b = 3$,于是归结为$n = 2p$的形式;当$k > 1$时, 由式(3-6)得

$$2^k p^{\alpha - b} | (2^k p^{\alpha - b} - 1)(2^{k-1} p^\alpha - 2^a + 1)$$

显然, 无论$b = \alpha$还是$b < \alpha$,偶数都不可能整除2个奇数之积, 故此时方程(3-4)无解.

1.3.2)若$p^x = 2 \cdot 2^y + 1$,则

$$Z^*(n) = \max\{p^x - 1\} = p^d - 1 = 2 \cdot 2^c.$$

令

$$Z(n) = m = n - Z^*(n) = 2^k p^\alpha - p^d + 1 = 2^k p^\alpha - 2 \cdot 2^c,$$

则

$$2^k p^\alpha \left| \frac{(2^k p^\alpha - 2 \cdot 2^c)(2^k p^\alpha - p^d + 2)}{2} \right. \tag{3-7}$$

当$k = c$时, 由式(3-7)有$2p^\alpha|(p^\alpha - 2)(2^k p^\alpha - p^d + 2)$, 偶数不可能整除奇数,方程(3-4)此时无解; 当$k > c$时, 有$2^{k-c}p^\alpha|(2^{k-c-1}p^\alpha - 1)(2^k p^\alpha - p^d + 2)$, 而$p^\alpha|(2^{k-c-1}p^\alpha - 1)(2^k p^\alpha - p^d + 2)$不可能成立, 从而此时方程(3-4)无解.

1.3.3) 若不存在关系式(3-5). 则$Z^*(n) = 1$. 而$Z(n) \neq n - 1$. 否则同情况1.2)中的讨论一样, 得到奇数被2整除的矛盾.

1.4)当$n = 2^k uv$时, 其中$(2^k, u) = (u, v) = (v, 2^k) = 1$.记$x$,$y$分别为$u$,$v$的因子,$z$为小于$k$的正整数. n的各个因子之间若存在形如$A = 2B \pm 1$的关系式, 只可能为$x = 2 \cdot 2^z \pm 1$或$x = 2y \cdot 2^z \pm 1$, 而不可能存在$2^z = 2x \pm 1$或$2^z y = 2x \pm 1$. 显然存在多对x,y,z满足下面讨论中所涉及的不定方程:

1.4.1)若$x = 2 \cdot 2^z - 1$,则$Z^*(n) = \max\{x\} = x_1 = 2 \cdot 2^{z_1} - 1$.令

$$Z(n) = m = n - Z^*(n) = 2^k uv - x_1 = 2^k uv - 2 \cdot 2^{z_1} + 1.$$

不失一般性, 设$u = ex_1$, 则有

$$2^k uv \left| \frac{(2^k uv - x_1)(2^k uv - 2 \cdot 2^{z_1} + 2)}{2} \right. \tag{3-8}$$

当$k = 1$时, 有$z_1 = 1$, 可得$2ev|(2ev - 1)(uv - 1)$, 然而$v|(2ev - x_1)(uv - 1)$不可能成立, 故得出矛盾; 当$k > 1$时, 有

$$2^k ev|(2^k ev - 1)(2^{k-1} uv - 2^{z_1} + 1),$$

从而得到偶数整除奇数的矛盾.

1.4.2)若$x = 2 \cdot 2^z + 1$, 则$Z^*(n) = \max\{x - 1\} = x_2 - 1 = 2 \cdot 2^{z_2}$. 令

$$Z(n) = m = n - Z^*(n) = 2^k uv - x_2 + 1 = 2^k uv - 2 \cdot 2^{z_2},$$

则

$$2^k uv \left| \frac{(2^k uv - 2 \cdot 2^{z_2})(2^k uv - 2 \cdot 2^{z_2} + 1)}{2} \right., \tag{3-9}$$

当$k = z_2$时, 有$2uv|(uv - 2)(2^k uv - 2^{k+1} + 1)$, 偶数不可能整除奇数, 得出矛盾; 当$k > z_2$时, 有

$$2^{k - z_2 + 1} uv \left| (2^k uv - 2)(2^k uv - x_2 + 2), \right.$$

而$u|(2^kuv-2)(2^kuv-x_2+2)$不可能成立, 得出矛盾.

1.4.3)若$x=2y\cdot 2^z-1$,则$Z^*(n)=\max\{x\}=x_3=2y_3\cdot 2^{z_3}-1$. 令

$$Z(n)=m=n-Z^*(n)=2^kuv-x_3=2^kuv-2y_3\cdot 2^{z_3}+1.$$

不失一般性, 设$u=tx_3$, 则有

$$2^kuv\left|\frac{(2^kuv-x_3)(2^kuv-2y_3\cdot 2^{z_3}+2)}{2}\right., \tag{3-10}$$

当$k=1$时, 有$z_3=1$, 可得$2tv|(2tv-1)(uv-2y_3+1)$, 然而$v|(2tv-1)(uv-2y_3+1)$不可能成立, 得出矛盾; 当$k>1$, 有$2^ktv|(2^ktv-1)(2^{k-1}uv-2^{z_3}y_3+1)$, 故得到偶数整除奇数的矛盾.

1.4.4)若$=2y\cdot 2^z+1$, 则$Z^*(n)=\max\{x-1\}=x_4-1=2y_4\cdot 2^{z_4}$. 令

$$Z(n)=m=n-Z^*(n)=2^kuv-x_4+1=2^kuv-2y_4\cdot 2^{z_4},$$

不失一般性, 设$v=sy_4$, 则有

$$2^kuv\left|\frac{(2^kuv-2y_4\cdot 2^{z_4})(2^kuv-2y_4\cdot 2^{z_4}+1)}{2}\right., \tag{3-11}$$

当$k=z_4$, 有$2uv|(uv-2y_4)(2^kuv-2^{z_4+1}y_4+1)$, 偶数不可能整除奇数, 得出矛盾; 当$k>z_4$时, 有$2^{k-z_4+1}su|(2^{k-z_4}su-2)(2^kuv-x_4+2)$, 而$u|(2^{k-z_4}su-2)(2^kuv-x_4+2)$不可能成立, 得出矛盾.

1.4.5)若不存在以上4种关系式, 则$Z^*(n)=1$.而$Z(n)\neq n-1$,否则会得出$n-1$为偶数的矛盾.

综上所述, 方程(3-4)的偶数解有且仅有一个为$n=6$.

2)当n为奇数时, 分以下3种情况讨论:

2.1)显然$n=1$不是方程(3-4)的解.

2.2)当$n=p^k$(p为奇素数, k为正整数)时, 若$p=3$,则$Z(n)=n-1, Z^*(n)=2$,从而$Z(n)+Z^*(n)\neq n$; 若$p\geqslant 5$,则$Z(n)=n-1, Z^*(n)=1$.故$n=p^k$是方程(3-4)的解.

2.3)当n含有多个不同素因子时, 设$n=uv$,这里$(u,v)=1$. 取x,y分别为u,v的因子. 不失一般性, 设$u>v$. 分下列几种情况讨论:

2.3.1)若存在关系式$x=2y-1$. 设$Z^*(n)=\max\{x\}=x_1=2y_1-1$. 记$u=bx_1$. 令

$$Z(n)=m=n-Z^*(n)=uv-x_1=uv-2y_1+1,$$

则有

$$uv\left|\frac{(uv-x_1)(uv-2y_1+2)}{2}\right.,$$

由此可得

$$bv \left| \frac{(bv-1)(uv-2y_1+2)}{2} \right.,$$

而

$$v \left| \frac{(bv-1)(uv-2y_1+2)}{2} \right.,$$

显然不成立, 故得出矛盾.

2.3.2)若存在关系式$x=2y+1$. 设$Z^*(n)=\max\{x-1\}=x_2-1=2y_2$. 记$n=dy_2$. 令

$$Z(n)=m=n-Z^*(n)=uv-x_2+1=uv-2y_2,$$

则有

$$uv \left| \frac{(uv-x_2+2)(uv-2y_2)}{2} \right.,$$

故$2du|(du-2)(uv-x_2+2)$, 而$u|(du-2)(uv-x_2+2)$, 显然不成立, 故得出矛盾.

2.3.3)若不存在形如$x=2y\pm 1$的关系式, 则$Z^*(n)=1$. 令$Z(n)=m=n-1$, 显然$n \left| \frac{n(n-1)}{2} \right.$成立. 下证此时取到的$m$不是满足$Z(n)$定义的最小值.

由同余方程$uX\equiv 1(\mathrm{mod} v)$有解. 可得$u^2X^2\equiv 1(\mathrm{mod} v)$有解. 其解不妨设为$Y$, 则可取$1\leqslant Y\leqslant v-1$. 则$v|(uY-1)(uY+1)$.

当$v|(uY-1)$时, 有

$$n=uv \left| \frac{uY(uY-1)}{2} \right.,$$

故

$$Z(n)=m\leqslant uY-1\leqslant u(v-1)-1<uv-1;$$

当$v|(uY+1)$时, 有

$$n=uv \left| \frac{uY(uY+1)}{2} \right.,$$

故

$$Z(n)=m\leqslant uY\leqslant u(v-1)<uv-1.$$

故$m=n-1$不是满足$Z(n)$定义的最小值.

综合以上几种情况, 奇数n是方程(3-4)的解当且仅当$n=p^k$, 其中$p\geqslant 5$为素数, k为正整数.

综上所述, 定理3.4成立.

3.4 关于含Smarandache互反函数与伪Smarandache函数的方程

对任意正整数n,伪Smarandache函数$Z(n)$定义为使得n整除$\sum\limits_{k=1}^{m}k$的最小的正整数m,即$Z(n)=\min\left\{m:n\left|\frac{m(m+1)}{2}\right.\right\}$.例如, 该函数的前几个值为:$Z(1)=1, Z(2)=3, Z(3)=2, Z(4)=7, Z(5)=5, Z(6)=3, Z(7)=6, Z(8)=15, Z(9)=9, Z(l0)=4, Z(11)=l0, Z(12)=8, Z(13)=12, Z(14)=7, Z(15)=5, Z(16)=31, Z(17)=16, Z(18)=8, Z(l9)=8, Z(20)=15, \cdots$.

关于这一函数, 许多学者研究了它的性质, 并得到了一些重要的结果, 见文献[85 − 89]. 例如, 张文鹏在文献[87]中研究了方程$Z(n)=S(n), Z(n)+1=S(n)$的可解性, 并给出了方程的全部正整数解, 关于这两个方程, 在本书的2.5节中有详细阐述.

而在文献[75]中, 引进了Smarandache互反函数$Sc(n)$, $Sc(n)$定义为满足$y|n!$且$1\leqslant y\leqslant m$最大正整数m,即$Sc(n)=\max\{m:y|n!, 1\leqslant y\leqslant m, m+1\dagger n!\}$.

例如,$Sc(n)$的前几个值为:$Sc(1)=1, Sc(2)=2, Sc(3)=3, Sc(4)=4, Sc(5)=6, Sc(6)=6, Sc(7)=10, Sc(8)=10, Sc(9)=10, Sc(l0)=10, Sc(11)=12, Sc(12)=12, Sc(13)=16, Sc(14)=16, Sc(15)=16, \cdots$.

文献[75]研究了$Sc(n)$的初等性质, 并证明了以下结论: 若$Sc(n)=x$, 且$n\neq 3$, 则$x+1$是大于n的最小素数.

在文献[91]中引进了伪Smarandache对偶函数$Z^*(n)$, $Z^*(n)$ 定义为满足$\sum\limits_{k=1}^{m}k$整除n的最大正整数m, 即$Z^*(n)=\max\left\{m:\frac{m(m+1)}{2}|n\right\}$. 文献[272]研究了$Z^*(n)$的性质, 得到了一些重要的结果. 文献[86]中研究了这三个函数之间的关系方程$Z(n)+Z^*(n)=n$ (见3.3节)与$Sc(n)=Z^*(n)+n$, 得到了一些重要结果, 并提出了一些还未解决的猜想:

猜想:方程$Sc(n)=Z^*(n)+n$的解为p^α, 其中p为素数,$2\dagger\alpha, p^\alpha+2$也为素数. 本节的目的是研究以上问题, 得到了下面的:

定理 3.5 方程$Sc(n)=Z^*(n)+n$的解为p^α, 其中p为素数, $2\dagger\alpha, p^\alpha+2$也为素数, 以及满足条件$\alpha(2\alpha-1)\dagger n(\alpha>1), n+2$ 为素数, n为正整数.

在证明定理之前先给出下面的几个引理.

引理 3.5 若$Sc(n)=x\in Z$,且$n\neq 3$,则$x+1$为大于n的最小素数.

证明:见文献[75].

由此可见, $Sc(n)$除了在$n=1, n=3$为奇数外, 在其余情况下的值都是偶数.

引理 3.6

$$Z^*(p^\alpha)=\begin{cases}2, p\neq 3\\ 1, p=3\end{cases}$$

引理 3.7 若$n\equiv 0(\bmod \alpha(2\alpha-1))$,则有$Z^*(n)\geqslant 2\alpha>1$.

引理 3.8

$$Z^*(n)\leqslant \frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}.$$

引理3.6-引理3.8的证明请参阅文献[27].

引理 3.9 当$n=p_0^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}(p_0=2,p_i\geqslant 3,k\geqslant 1,\alpha_i\geqslant 1)$为$n$的标准素分解式时,有

$$Z(n)\leqslant n-\frac{n}{\min\{p_0^{\alpha_0},p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}}$$

证明:类似于3.3节中证明定理3.3的方法. 当$n=p_0^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}(p_0=2,p_i\geqslant 3,k\geqslant 1,\alpha_i\geqslant 1)$为其标准素分解式时, 分两种情况来证明.

(i)设$n=2kp^\alpha,\alpha\geqslant 1,(2k,p^\alpha)=1,p\geqslant 3$为素数, 由同余方程

$$4kx\equiv 1(\bmod p^\alpha)$$

有解, 可得同余方程

$$16k^2x^2\equiv 1(\bmod p^\alpha)$$

有解, 其解不妨设为y,则可取$1\leqslant y\leqslant p^{\alpha-1}$,又$p^{\alpha-y}$亦为前面同余方程的解, 则可取$1\leqslant y\leqslant \frac{p^{\alpha-1}}{2}$.由

$$16k^2y^2\equiv 1(\bmod p^\alpha),$$

则$p^\alpha\,|(4ky-1)(4ky+1)$,而$(4ky-1,4ky+1)=1$,于是$p^\alpha\,|4ky-1$ 或$p^\alpha\,|4ky+1$.

若$p^\alpha\,|4ky-1$, 则$n=2kp^\alpha\left|\frac{4ky(4ky-1)}{2}\right.$, 从而

$$\begin{aligned}Z(n)=&m\leqslant 4ky-1\\ &\leqslant\frac{4k(p^\alpha-1)}{2}-1\leqslant n-2k-1\leqslant\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)n\\ &\leqslant n-\frac{n}{\min\{p_0^{\alpha_0},p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}}.\end{aligned}$$

若$p^\alpha\,|4ky+1$, 则$n=2kp^\alpha\left|\frac{4ky(4ky+1)}{2}\right.$, 从而也有

$$Z(n)=m\leqslant 4ky\leqslant\frac{4k(p^\alpha-1)}{2}\leqslant n-2k=\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right)n\leqslant n-\frac{n}{\min\{p_0^{\alpha_0},p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}}.$$

(ii)设$n=2^\alpha(2k+1),(\alpha\geqslant 1,k\geqslant 1)$,则同余方程

$$(2k+1)x\equiv 1(\bmod 2^{\alpha+1})$$

与

$$(2k+1)\equiv -1(\bmod 2^{\alpha+1})$$

均有解, 且解为奇数, 设α为同余方程

$$(2k+1)x \equiv 1(\bmod 2^{\alpha+1})$$

的解, 若$1 \leqslant \alpha \leqslant 2^{\alpha}-1$,则取$\alpha$即可, 否则

$$2^{\alpha}+1 \leqslant \alpha \leqslant 2^{\alpha+1}-1,$$

则

$$2^{\alpha+1}-\alpha \leqslant 2^{\alpha+1}-2^{\alpha}-1=2^{\alpha}-1,$$

且$2^{\alpha+1}-\alpha$满足同余方程

$$(2k+1)x \equiv -1(\bmod 2^{\alpha+1}),$$

故两个同余方程中必有一个满足$1 \leqslant \alpha \leqslant 2^{\alpha}-1$的解$\alpha$,则$2^{\alpha+1} \mid (2k+1)\alpha+1$或$2^{\alpha+1} \mid (2k+1)\alpha-1$, 若$2^{\alpha+1} \mid (2k+1)\alpha+1$,则

$$2^{\alpha+1}(2k+1) \mid [(2k+1)\alpha+1](2k+1)\alpha,$$

从而

$$Z(n) \leqslant \alpha(2k+1) \leqslant (2^{\alpha}-1)(2k+1) \leqslant \left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)n \leqslant n-\frac{n}{\min\{p_0^{\alpha_0},p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}}.$$

而当$2^{\alpha+1}|(2k+1)\alpha-1$时, 同理也有

$$Z(n) \leqslant \left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)n \leqslant n-\frac{n}{\min\{p_0^{\alpha_0},p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}}.$$

综合(i),(ii)有, 当$n=p_0^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}(p_0=2,p_i \geqslant 3,k \geqslant 1,\alpha_i \geqslant 1)$为其标准素分解式时, 则

$$Z(n) \leqslant n-\frac{n}{\min\{p_0^{\alpha_0},p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}}.$$

下面将给出定理的证明, 分五种情况来证明.

(1)$n=1$时, $Z^*(1)=1, Sc(1)=1$,则1不为其解.

(2)$n=3^{\alpha}(\alpha \geqslant 1)$,由引理3.6, $Z^*(3^{\alpha})=2$,若$n=3^{\alpha}$是原方程的解,则$Sc(3^{\alpha})=2+3^{\alpha}$,因为$3|3^{\alpha}+2+1$,从而$3^{\alpha}+2+1$不可能为素数而与引理3.5相矛盾, 故$n=3^{\alpha}$不是原方程的解.

(3)$n=p^{\alpha}(\alpha \geqslant 1,p \geqslant 5)$,由引理3.6,$Z^*(p^{\alpha})=1$, 若$n=p^{\alpha}$是原方程的解, 则$Sc(p^{\alpha})=1+p^{\alpha}$,因当$p \geqslant 5$时, $3|p^{2^{\beta}+2}$,故由引理3.5, α不能为偶数, 且当$p^{\alpha}+2(2\dagger\alpha)$ 为素数时, $n=p^{\alpha}(\alpha \geqslant 1, p \geqslant 5$为素数)满足原方程.

(4)$n=2^{\alpha}(\alpha \geqslant 1)$,若$\frac{m(m+1)}{2}|2^{\alpha}$,因$(m,m+1)=1$,则$m=1$,故$Z^*(2^{\alpha})=1$,若$n=2^{\alpha}$是原方程的解,则$Sc(2^{\alpha})=1+2^{\alpha}$,因$2|(2^{\alpha}+1+1)$,与引理3.5矛盾,故$n=2^{\alpha}(\alpha \geqslant 1)$不是原

方程的解.

(5)$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} (k \geqslant 2, \alpha_i \geqslant 1)$ 为其标准素分解式. 又分为两种情况来证明.

(i)$2 \dagger n$,则$2 \dagger p_i^{\alpha_i}$时,从而$2|Sc(n)$,若n要满足原方程,则必须$2 \dagger Z^*(n)$.现考虑$Z^*(n)$,若存在整数$\alpha(\alpha > 1)$,使$\alpha(2\alpha-1)|n$,则$Z^*(n) \geqslant 2\alpha - 1$,若存在整数$\alpha(\alpha > 1)$,使$\alpha(2\alpha+1)|n$,则$Z^*(n) \geqslant 2\alpha$,从而

$$Z^*(n) = \max\{\max\{2k : k(2k+1)|n\}, \max\{2k-1 : k(2k-1)|n\}\}.$$

再分三种情况来讨论

第一,若$Z^*(n) = 2\alpha - 1 > 1$,则$\alpha(2\alpha-1)|n$,有$\alpha|n, \alpha|[n+(2\alpha-1)+1]$. 若$n$要满足原方程, 则$Sc(n) = 2\alpha - 1 + n$.而$Sc(n)+1$不为素数, 与引理3.5相矛盾.

第二, 若$Z^*(n) = 2\alpha > 1$,则$\alpha(2\alpha+1)|n$,有$\alpha|n, (2\alpha+1)|n$.若n要满足原方程, 则$Sc(n) = 2\alpha + n$.而$Sc(n)+1$不为素数, 与引理3.5相矛盾.

最后, 若$Z^*(n) = 1$, 由$\alpha > 1$, 则$\alpha(2\alpha-1) \dagger n$, 从而若$n+2$不是素数,由引理3.5, 这样的$n$ 不是原方程的解. 若$n+2$为素数, 由引理3.5, 这样的n为原方程的解. 即$\alpha(2\alpha - 1) \dagger n, n+2$ 为素数时的正整数n为原方程的解.

(ii)$2|n$,若n满足原方程, 则必须$Z^*(n)$为偶数,且$Z^*(n) \geqslant 2$,而

$$Z^*(n) = m \geqslant 2, \frac{m(m+1)}{2} \,|n\,,$$

则$(m+1)|n$,进而$(m+1)|(n+m+1)$, 这样$Sc(n) = n+m+1$不是素数,与引理3.5矛盾.
因此, 方程$Sc(n) = Z^*(n) + n$的解为p^α, 其中p为素数, $2 \dagger \alpha, p^\alpha + 2$也为素数, 以及满足条件$\alpha(2\alpha-1) \dagger n (\alpha > 1), n+2$ 为素数, n为正整数. 这就完成了定理3.5的证明.

3.5 关于Smarandache双阶乘函数

对任意的正整数n,著名的伪Smarandache函数$Z(n)$定义为最小的正整数m使得$n|\frac{m(m+1)}{2}$, 即$Z(n) = \min\left\{m : m \in N, n|\frac{m(m+1)}{2}\right\}$.这个函数是由罗马尼亚著名数论专家Smarandache在文献[7]中引进的. 关于函数$Z(n)$的算数性质, 许多学者进行了研究, 获得了不少有趣的结果[28,36,97−99]. 例如:

(1)对于任意正整数n,$Z(n) < n$不恒成立.

(2)对任意素数$p \geqslant 3$, $Z(p) = p - 1$.

(3)对任意素数$p \geqslant 3$及$k \in N$, $Z(p^k) = p^k - 1$.当$p = 2$时, 则有$Z(2^k) = 2^{k+1} - 1$.

(4)$Z(n)$是不可加的, 即$Z(m+n)$不恒等于$Z(m)+Z(n)$;$Z(n)$也不是可乘的, 即$Z(m \cdot n)$不恒等于$Z(m) \cdot Z(n)$.

从以上几个简单的性质可以看出, $Z(n)$的值分布很不规律, 关于它的性质还有待于

进一步研究.

此外Smarandache还定义另外一个数论函数$Sdf(n)$为$Sdf(n) = \min\{m : m \in N, n|m!!\}$. 该函数称为Smarandache双阶乘函数, 关于它的初等性质, 也有不少学者进行了研究并得到了一些重要的结果[4,6,31,100]. 例如, $Sdf(n)$有一个很重要的性质, 即$Sdf(n)$保持奇偶性不变, 也就是说若n为一个奇数, 则$Sdf(n)$也为奇数, 而若n为一个偶数则$Sdf(n)$也为偶数. 很容易发现, $Sdf(n)$也是一个很不规律的函数, 尤其是在n为偶数的时候$Sdf(n)$表现出很不稳定的性质.

对$Z(n)$和$Sdf(n)$, 这两个均表现出不稳定性质的函数, 能否在它们之间找出一些联系呢? 本节的主要目的就是研究了下面两个函数方程的可解性, 即求方程

$$Z(n) = Sdf(n), Z(n) + 1 = Sdf(n)$$

的所有正整数解.本节通过初等方法介绍这个问题的解答, 即证明了下面的两个定理.

定理 3.6 对任意正整数$n > 1$, 函数方程

$$Z(n) = Sdf(n) \tag{3-12}$$

仅有奇数解,且其所有解仅有2种形式:

①$n = 45$;

②$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} p$,

其中$k \geqslant 1$, $p_1 < p_2 < \cdots < p_k < p$均为奇素数, 对$1 \leqslant i \leqslant k$, $\alpha_i \geqslant 1$,同时$p + 1 \equiv 0(\bmod p_i^{\alpha_i})$.

定理 3.7 对任意正整数$n > 1$, 函数方程

$$Z(n) + 1 = Sdf(n) \tag{3-13}$$

仅有奇数解, 且其所有解仅有3种形式:

①$n = 9$;

②$n = p$;

③$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} p$,

其中$k \geqslant 1$, $p_1 < p_2 < \cdots < p_k < p$ 均为奇素数, 对$1 \leqslant i \leqslant k$, $\alpha_i \geqslant 0$ 且至少存在一个$\alpha_i \geqslant 1$, 同时$p - 1 \equiv 0(\bmod p_i^{\alpha_i})$.

下面证明这两个定理. 首先定理3.6. 事实上, 当$n = 1$时, 方程$Z(n) = Sdf(n)$成立. 很容易验证, 当$n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$时, $Z(n) = Sdf(n)$不成立. 于是不妨设$n \geqslant 8$.

首先证明方程(3-12)不可能有偶数解. 设$n = 2^{\alpha} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$为$n$的标准分解因式.

(1)若$k = 0$,即$n = 2^{\alpha}$, 此时由$Sdf(n)$的性质可知$Sdf(2^{\alpha})$为偶数, 而$Z(2^{\alpha}) = 2^{\alpha+1} - 1$为一个奇数, 从而$Sdf(2^{\alpha}) \neq Z(2^{\alpha})$.故此时$n$不满足方程.

(2)若$k \geqslant 1$,则$n = 2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$.由$Sdf(n)$ 保持奇偶性不变可知, 若$Z(n) = Sdf(n) = a$,则a必为一偶数, 不妨设$Z(n) = Sdf(n) = 2m$,于是由$Z(n)$定义有

$$2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}|m(2m+1). \tag{3-14}$$

由(3-14)式可知, 必有$2^{\alpha}|m$,且对$\forall p_i^{\alpha i}$ 必有$p_i^{\alpha i}|m$ 或$p_i^{\alpha}|(2m+1)$. 由$2^{\alpha}|m$可推出

$$2^{\alpha}|m!!. \tag{3-15}$$

记$S_1 = \{p_i^{\alpha_i} : p_i^{\alpha_i}|m\}$, $S_2 = \{p_j^{\alpha_j} : p_j^{\alpha_j}|(2m+1)\}$.

注意到一个事实, 即$S_2 \neq \emptyset$,这是因为若$S_2 = \emptyset$,则对所有$p_i^{\alpha_i}$ 均有$p_i^{\alpha_i}|m$, 又$2^{\alpha}|m$, 于是由$2^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}|\frac{(2m-1)\cdot 2m}{2}$ 可知, $Z(n) \leqslant 2m-1$,故$S_2 \neq \emptyset$于是:

(i)若$S_1 = \emptyset$,即$\forall p_i^{\alpha_i}$, $p_i^{\alpha_i}|(2m+1)$. 若$\max\{p_i^{\alpha_i}\} \leqslant m$,结合(3-15)式知, $Sdf(n) \leqslant m$; 若$\max\{p_i^{\alpha_i}\} > m$,结合(3-15)式知, $Sdf(n) = 2s$, 必$\exists p_{i_0}^{\alpha_{i_0}} \in S_2$,使得$p_{i_0}^{\alpha_{i_0}}|s$. 当然$m \neq s$.从而$Sdf(n) \neq 2m$;

(ii)若$S_1 \neq \emptyset$, 设$p_i^{\alpha_i} \in S_1$, $p_j^{\alpha_j} \in S_2$. 若$\max\{p_i^{\alpha_i}\} < \max\{p_j^{\alpha_j}\}$,类似(i)的分析方法可知, 无论$\max\{p_j^{\alpha_j}\} \leqslant m$,还是$\max\{p_j^{\alpha_j}\} > m$,都有$Sdf(n) \neq 2m$. 若$\max\{p_i^{\alpha_i}\} > \max\{p_j^{\alpha_j}\}$时, 可推出$Sdf(n) \leqslant m$.

综合(i),(ii)可知, 此时$Sd(n) \neq Z(n)$.这就证明了方程(3-12)不可能有偶数解.

若n为奇数, 设$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}p^{\alpha}$ 为n的标准分解因式. 以下分3种情况讨论:

(1)若$k = 0$,即$n = p^{\alpha}$,此时$Z(p^{\alpha}) = p^{\alpha}-1$为偶, 而$Sdf(n)$为奇, 所以$Z(p^{\alpha}) \neq Sdf(p^{\alpha})$.

(2)若$k \geqslant 1$且$\alpha = 1$,则$n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}p$.

①若$\max\{p_i^{\alpha_i}\} < p$, 则由$Sdf(n)$性质可知

$$Sdf(n) = Sdf(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}p) = \max\{Sdf(p_1^{\alpha_1}),\cdots,Sdf(p_k^{\alpha_k}),Sdf(p)\} = p.$$

若成立$Z(n) = Sdf(n) = p$, 则由$Z(n)$定义知

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}p\left|\frac{p(p+1)}{2}\right..$$

于是必须成立$p_i^{\alpha_i}|(p+1)$, 即$p+1 \equiv 0(\bmod p_i^{\alpha_i})$.

另一方面, 证明只要满足$p+1 \equiv 0(\bmod p_i^{\alpha_i})$, 就有$Z(n) = p$.对$\forall h < p$,

(i)若$h < p-1$,则由$p \dagger \frac{h(h+1)}{2}$知, $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}p \dagger \frac{h(h+1)}{2}$, 故$Z(n) \neq h$;

(ii)若$h = p-1$,则由$p_i^{\alpha_i}|(p+1)$及$(p-1,p+1) = 2$知, $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}p\dagger\frac{(p-1)p}{2}$, 故$Z(n) \neq p-1$.从而知道, 若$p+1 \equiv 0(\bmod p_i^{\alpha_i})$, 则有$Z(n) = Sdf(n)$, 这即是方程(3-12)的一组解.

②若$\max\{p_i^{\alpha_i}\} > p$, 则此时$Sdf(n) = p$, 或$Sdf(n) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{Sdf(p_i^{\alpha_i})\} = Sdf(p_j^{\alpha_j})$.

(i)若$Sdf(n) = p$,则由$\max\{p_i^{\alpha_i}\} > p$知, $\max\{p_i^{\alpha_i}\} \dagger \frac{p(p+1)}{2}$, 故$Z(n) \neq p$,从而$Z(n) \neq$

$Sdf(n)$.

(ii)若$Sdf(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{Sdf(p_i^{\alpha_i})\}=Sdf(p_j^{\alpha_j})$, 由$Sdf(n)$的性质知,必有$p_j|Sdf(p_j^{\alpha_j})$, 于是$p_j|Sdf(n)$.

首先注意到一个事实, 即对任意奇素数p及$\alpha\geqslant 2$, 除$p^\alpha=3^2$外, 均有$Sdf(p^\alpha)<p^\alpha$, 因为若$p\leqslant 2\alpha-1$, 则$Sdf(p^\alpha)=(2\alpha-1)p<p^\alpha$(除$p^\alpha=3^2$外); 若$p<2\alpha-1$, 则很容易由$p^2|p^\alpha!!$知, $Sdf(p^\alpha)<p^\alpha$. 而当$Sdf(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{Sdf(p_i^{\alpha_i})\}=Sdf(3^2)=9$时, 很容易验证$n=3^2\times 5=45$为一解, 其余情况均不成立.

对于$Sdf(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{Sdf(p_i^{\alpha_i})\}=Sdf(p_j^{\alpha_j})<p_j^{\alpha_j}$, 若成立$Z(n)=Sdf(n)=m$,则$m<p_j^{\alpha_j}$且$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}p|\frac{m(m+1)}{2}$. 又由以上分析知, $p_j|m$,从而$p_j^{\alpha_j}|m$,这与$m<p_j^{\alpha_j}$矛盾. 故$Z(n)\neq Sdf(n)$.

(3)若$k\geqslant 1$且$\alpha\geqslant 2$, 则$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}p^\alpha$.

①若$Sdf(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{Sdf(p_i^{\alpha_i})\}=Sdf(p^\alpha)$, 由$k\geqslant 1$知$p^\alpha\neq 3^2$,于是$Sdf(n)=Sdf(p^\alpha)=m<p^\alpha$.此时由$p|m$及$m<p^\alpha$可推出$p^\alpha\dagger\frac{m(m+1)}{2}$, 因此$Z(n)\neq m$,故$Z(n)\neq Sdf(n)$.

②若$Sdf(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{Sdf(p_i^{\alpha_i})\}=Sdf(p_j^{\alpha_j})$, 由$\alpha\geqslant 2$知, 在这种情况下$\alpha_j\geqslant 2$且$p_j^{\alpha_j}\neq 3^2$,于是$Sdf(n)=Sdf(p_j^{\alpha_j})=m<p_j^{\alpha_j}$. 同样, 由$p_j^{\alpha_j}\dagger\frac{m(m+1)}{2}$知, $Z(n)\neq m$,故$Z(n)\neq Sdf(n)$.

于是便完成了定理3.6的证明.

下面证明定理3.7. 与定理3.6的证明方法相似, 这单只给出大概过程. 由$Z(p)=p-1$及$Sdf(p)=p$可知,$n=p$满足方程(3-13). 对$n=p^k$的情形, $Z(p^k)+1=p^k-1+1=p^k$, 但是除$n=3^2$外均成立$Sdf(p^k)<p^k$,当然不可能满足方程(3-13). 而$n=3^2=9$恰好就是方程(3-13)的一个特殊解. 对$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}p$的情形, 也容易证明, 要使$Z(n)+1=Sdf(n)$当且仅当满足$p-1\equiv 0(\mathrm{mod} p_i^{\alpha_i})$. 其余情况均与定理3.6的证明方法类似,这里将不再赘述.

3.6 一类广义伪Smarandache函数

著名的伪Smarandache的函数$Z(n)$定义为:

$$Z(n)=\min\{m:m\in N^+,n\left|\frac{m(m+1)}{2}\right.\}. \tag{3-16}$$

文献[105]推广了伪Smarandache函数, 对任意的正整数n,推广伪Smarandache函数$Z_3(n)$定义为

$$Z_3(n)=\min\{m:m\in N^+,n\left|\frac{m(m+1)(m+2)}{6}\right.\}. \tag{3-17}$$

本节将介绍关于$Z_3(n)$的初等性质的研究, 分别对$n = 2^l p, n = 2^l p^k, n = 2^l \times 3^k, l, k \in N^+, p > 3$为素数, 给出了$Z_3(n)$的函数值形式. 这对函数方程正整数解, 均值及渐近公式等问题的研究也是有意义的[29,36,107].

引理 3.10 对任意正整数k, 素数p, 若$Z_3(kp) = m$, 则m必为$lp-2, lp-1, lp, l \in N^+$三种情形.

证明:因为$Z_3(n) \geqslant 1$,当$p = 2, 3$时, 引理显然成立. 当$p > 3$是素数, 由$p|m(m+1)(m+2)/6$, 则p必整除$m, m+1, m+2$其中之一, 因此m必有$lp-2, lp-1, lp, l \in N^+$三种情形. 证毕.

下面将给出关于$Z_3(n)$的几个简单性质及证明.

(1)当$n = 2^l p, l \in N^+, p > 3$为素数, 设$Z_3(2^l p) = m$,考虑$m = gp-2, m = gp-1, m = gp$三种情况及$g$的取值有:

(a)若$g = 1, m = p-2$,此时仅有$m+1 = p-1$为偶数, 由$2^l p|(p-2)(p-1)p/6$,则有$2^{l+1}|p-1$,用同余式表述即为, 当$p-1 \equiv 0(\bmod 2^{l+1})$时,$Z_3(2^l p) = p-2$;若$m = p-1$, 由$2^l p|(p-1)p(p+1)/6$,则有$2^l|p-1$或者$2^l|p+1$,即当$p \pm 1 \equiv 0(\bmod 2^l)$,但$p-1 \not\equiv 0(\bmod(2^{l+1}))$时, $Z_3(2^l p) = p-1$;若$2^l p|p(p+1)(p+2)/6$,则有$p+1 \equiv 0(\bmod(l+1))$, 此时$p+1 \equiv 0(\bmod 2^l)$,应有$Z_3(2^l p) = p-1$.

(b)同理, 若$g = 2, m = 2p-2$时, 由$2^l p|(2p-2)(2p-1)2p/6$,则$2^{l-1}|p-1$,即当$p-1 \equiv 0(\bmod 2)$,且$p-1 \not\equiv 0(\bmod 2^l)$时, $Z_3(2^l p) = 2p-2$;$m \neq 2p-1$,这是因为若$m = 2p-1$,则$2^l p|(2p-1)2p(2p+1)/6$,这是不可能的;若$m = 2p$,由$2^l p|2p(2p+1)(2p+2)/6$,则$2^{l-1}|p+1$,即$p+1 \equiv 0(\bmod 2^{l-1})$,且$p+1 \not\equiv 0(\bmod 2^l)$.

(c)若$g = 2^k, k > 1, k \in N$,由$2^l p|(2^k p-2)(2^k p-1)2^k p/6$, 则$2^l|2^k$,由$Z_3(n)$的最小性, 取$2^k = 2^l$, 此时, $Z_3(2^l p) = 2^l p-2$.

(d)若$g > 3$为奇数, $m = gp-2$,由$2^l p|(gp-2)(gp-1)gp/6$, 有$2^{l+1}|gp-1$;若$m = gp-1$,由$2^l p|(gp-1)gp(gp+1)/6$,则$2^{l-1}|gp-1$或者$2^l|gp+1$;若$m = gp$,由$2^l p|gp(gp+1)(gp+2)/6$, 则$2^{l+1}|gp+1$,亦有$2^l|gp+1$, 此时应有$m = gp-1$.同理, 若$g > 3$为奇数, $m = 2gp-2$,此时有$2^{l-1}|gp-1$;若$m = 2gp, g > 3$为奇数, 此时有$2^{l-1}|gp+1$.至此m已没

有其它可能的情形. 综上, 有

$$Z_3(2^lp)=\begin{cases}p-2, & p-1\equiv 0(\bmod 2^{l+1});\\ p-1, & p\pm 1\equiv 0(\bmod 2^{l});\\ 2p-2, & p-1\equiv 0(\bmod 2^{l-1});\\ 2p, & p+1\equiv 0(\bmod 2^{l-1});\\ gp-2, & gp-1\equiv 0(\bmod 2^{l+1});\\ gp-1, & gp\pm 1\equiv 0(\bmod 2^{l});\\ 2sp-2, & sp-1\equiv 0(\bmod 2^{l-1});\\ 2sp, & sp+1\equiv 0(\bmod 2^{l-1});\\ 2^lp-2, & \text{其它},\end{cases}$$

其中$3\leqslant g\leqslant 2^l-1, 3\leqslant s\leqslant 2^{l-1}-1$为奇数.

(2)同理, 当$n=2^lp^k, l\in N^+, k\in N^+, p>3$为素数时, 有

$$Z_3(2^lp^k)=\begin{cases}p^k-2, & p^k-1\equiv 0(\bmod 2^{l+1});\\ p^k-1, & p^k\pm 1\equiv 0(\bmod 2^{l});\\ 2p^k-2, & p^k-1\equiv 0(\bmod 2^{l-1});\\ 2p^k, & p^k+1\equiv 0(\bmod 2^{l-1});\\ gp^k-2, & gp^k-1\equiv 0(\bmod 2^{l+1});\\ gp^k-1, & gp^k\pm 1\equiv 0(\bmod 2^{l});\\ 2sp^k-2, & sp^k-1\equiv 0(\bmod 2^{l-1});\\ 2sp^k, & sp^k+1\equiv 0(\bmod 2^{l-1});\\ 2^lp^k-2, & \text{其它},\end{cases}$$

其中$3\leqslant g\leqslant 2^l-1, 3\leqslant s\leqslant 2^{l-1}-1$为奇数.

当$n=2^l\times 3^k, l,k\in N^+$时, 考虑到上式及文献[105]中性质2 (文献[105]中[4]式)有

$$Z_3(2^l\times 3^k)=\begin{cases}3^{k+1}-2, & 3^{k+1}-1\equiv 0(\bmod 2^{l+1});\\ 3^{k+1}-1, & 3^{k+1}\pm 1\equiv 0(\bmod 2^{l});\\ 2\times 3^{k+1}-2, & 3^{k+1}-1\equiv 0(\bmod 2^{l-1});\\ 2\times 3^{k+1}, & 3^{k+1}+1\equiv 0(\bmod 2^{l-1});\\ g\cdot 3^{k+1}-2, & g\cdot 3^{k+1}-1\equiv 0(\bmod 2^{l+1});\\ g\cdot 3^{k+1}-1, & g\cdot 3^{k+1}\pm 1\equiv 0(\bmod 2^{l});\\ 2s\cdot 3^{k+1}-2, & s\cdot 3^{k+1}-1\equiv 0(\bmod 2^{l-1});\\ 2s\cdot 3^{k+1}, & s\cdot 3^{k+1}+1\equiv 0(\bmod 2^{l-1});\\ 2^l\times 3^{k+1}-2, & \text{其它},\end{cases}$$

其中$3 \leqslant g \leqslant 2^l-1, 3 \leqslant s \leqslant 2^{l-1}-1$为奇数.

3.7 一个包含Smarandache函数及第二类伪Smarandache函数的方程

对任意正整数n, 著名的Smarandache函数域$S(n)$定义为最小的正整数m使得$n|m!$. 即$S(n)=\min\{m: m\in N, n|m!\}$.而第二类伪Smarandache函数$Z_2(n)$定义为最小的正整数$k$使得了$n$整除$\frac{k^2(k+1)^2}{4}$,或者

$$Z_2(n)=\min\left\{k: k\in N, n\left|\frac{k^2(k+1)^2}{4}\right.\right\},$$

其中N表示所有正整数的集合. 这两个函数以及有关Smarandache函数的定义可参阅文献[7]. 从$S(n)$及$Z_2(n)$的定义容易推出它们的前几项值为:

$$S(1)=1, S(2)=2, S(3)=3, S(4)=4, S(5)=5, S(6)=3, S(7)=7, S(8)=4, \cdots.$$

$$Z_2(1)=1, Z_2(2)=3, Z_2(3)=2, Z_2(4)=3, Z_2(5)=4, Z_2(6)=3, Z_2(7)=6, Z_2(8)=7, \cdots.$$

关于$S(n)$的初等性质, 许多学者进行了研究, 获得了不少有意义的结果[28,36,97−100]. 例如文献[28]研究了方程

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=\sum_{i=1}^{k} S(m_i)$$

的可解性, 利用解析数论中著名的三素数定理证明了对任意正整数$k\geqslant 3$, 该方程有无穷多组正整数解$(m_1, m_2, \cdots, m_k)$.

文献[36]研究了$S(n)$的值分布问题, 证明了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta(\frac{3}{2})x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right),$$

其中$P(n)$表示n的最大素因子,$\zeta(s)$表示Riemann zeta-函数.

文献[97 − 98]研究了$S(2^{p-1}(2^p-1))$的下界估计问题, 证明了对任意素数$p\geqslant 7$, 有估计式

$$S(2^{p-1}(2^p-1))\geqslant 6p+1 \text{及} S(2^p+1)\geqslant 6p+1.$$

最近, 文献[99]获得了更一般的结论:即证明了对任意素数$p\geqslant 17$和任意不同的正整数a 及b,有估计式

$$S(a^p+b^p)\geqslant 8p+1.$$

此外, 文献[100]讨论了Smarandache函数的另一种下界估计问题, 即Smarandache函

数对费尔马数的下界估计问题, 证明了对任意正整数$n \geqslant 3$有估计式:

$$S(F_n) = S(2^{2^n} + 1) \geqslant 8 \cdot 2^n + 1,$$

其中$F_n = 2^{2^n} + 1$为著名的费尔马数.

关于$S(n)$的其它研究内容非常之多, 这里不再一一列举. 而对于函数$Z_2(n)$的性质, 至今了解的很少, 甚至不知道这个函数的均值是否具有渐近性质.

本节的主要目的是利用初等方法研究函数方程$Z_2(n) + 1 = S(n)$的可解性, 并获得了这个方程的所有正整数解, 具体地说也就是证明了下面的:

定理 3.8 对任意正整数n,函数方程$Z_2(n) + 1 = S(n)$有且仅有下列三种形式的解:

(A)$n = 3, 4, 12, 3^3, 2 \cdot 3^3, 2^2 \cdot 3^3, 2^3 \cdot 3^3, 2^4 \cdot 3^3, 3^4, 2 \cdot 3^4, 2^2 \cdot 3^4, 2^3 \cdot 3^4, 2^4 \cdot 3^4$;

(B)$n = p \cdot m$,其中$p \geqslant 5$为素数, m为整除$\frac{(p-1)^2}{4}$的任意正整数;

(C)$n = p^2 \cdot m$,其中$p \geqslant 5$为素数且$2p - 1$为合数, m为$(2p - 1)^2$的任意大于1的因数.

显然该定理彻底解决了方程$Z_2(n) + 1 = S(n)$的可解性问题. 亦即证明了这个方程有无穷多个正整数解并给出了它的每个解的具体形式.

下面利用初等方法以及Smarandache函数的性质给出定理的直接证明. 有关自然数的整除性质以及素数的有关内容可参阅文献[4 − 6]. 事实上容易验证: 当

$$n = 3, 4, 12, 3^3, 2 \cdot 3^3, 2^2 \cdot 3^3, 2^3 \cdot 3^3, 2^4 \cdot 3^3, 3^4, 2 \cdot 3^4, 2^2 \cdot 3^4, 2^3 \cdot 3^4, 2^4 \cdot 3^4$$

时, 方程$Z_2(n) + 1 = S(n)$显然成立. 现在分下面几种情况详细讨论:

当$S(n) = S(p) = p \geqslant 5$时, 设$n = mp$,则$S(m) < p$且$(m, p) = 1$.此时若$n$满足方程$Z_2(n)+1 = S(n)$,那么$Z_2(n) = p-1$,所以由$Z_2(n)$的定义有$n$整除$\frac{(p-1)^2p^2}{4}$,即$mp|\frac{(p-1)^2p^2}{4}$.所以$m|\frac{(p-1)^2}{4}$,因此$m$为$\frac{(p-1)^2}{4}$的任意正因数. 反之, 当$n = mp$且$m|\frac{(p-1)^2}{4}$时, 有$S(n) = p, Z_2(n) = p - 1$, 所以$n = mp$是方程$Z_2(n) + 1 = S(n)$的解. 于是证明了定理中的第二种情况(B).

当$S(n) = S(p^2) = 2p, p \geqslant 5$时, 设$n = mp^2$,则$S(n) < 2p$且$(m, p) = 1$.此时若$n$满足方程$Z_2(n) + 1 = S(n)$,那么$Z_2(n) = 2p - 1$,所以由$Z_2(n)$的定义有$n$ 整除$(2p - 1)^2p^2$,所以

$$mp^2|(2p - 1)p^2, \text{或者} m|(2p - 1)^2.$$

显然$m \neq 1$, 否则$n = p^2, S(p^2) = 2p$,而$Z_2(p^2) = p - 1$.所以此时$n = p^2$不满足方程$Z_2(n) + 1 = S(n)$.于是m必须是$(2p - 1)^2$的一个大于1的因数. 此外, 因为$2p - 1$为合数, 故当$n = mp^2$时, $Z_2(n) \neq p - 1, Z_2(n) \neq p$, 所以$Z_2(n) = 2p - 1$, 而$S(n) = 2p$, 所以$n = mp^2$ 满足方程$Z_2(n) + 1 = S(n)$.于是证明了定理中的情形(C).

现在证明当$S(n) = S(p^\alpha)$且$p \geqslant 5$以及$\alpha \geqslant 3$时, n不满足方程$Z_2(n) + 1 = S(n)$. 这时设$n = mp^\alpha, S(m) \leqslant S(p^\alpha), (m, p) = 1$. 于是有$S(n) = hp$, 这里$h \leqslant \alpha$.若$n$满足方

程$Z_2(n)+1=S(n)$,则$Z_2(n)=hp-1$. 于是由$Z_2(n)$的定义有

$$n=mp^{\alpha}\left|\frac{(hp-1)^2m^2p^2}{4}\right.$$

从而由整除的性质可知$p^{\alpha-2}|h^2\leqslant\alpha^2$.所以$p|h$. 故$\alpha\geqslant h\geqslant 5$. 当$p\geqslant 5$且$\alpha\geqslant 5$时,$p^{\alpha-2}|h^2\leqslant\alpha^2$是不可能的, 因为此时有不等式$p^{\alpha-2}>\alpha^2$.

现在考虑$S(n)=3$, 此时$n=3$或者6.经验证$n=3$是方程$Z_2(n)+1=S(n)$的一个解; 当$S(n)=S(3^2)=6$时, $n=9,18,36,45$, 经验证它们都不满足方程$Z_2(n)+1=S(n)$;当$S(n)=S(3^3)=9$时,

$$n=3^3,2\cdot3^3,2^2\cdot3^3,5\cdot3^3,7\cdot3^3,2^3\cdot3^3,10\cdot3^3,14\cdot3^3,16\cdot3^3,20\cdot3^3.$$

此时经验证

$$n=3^3,2\cdot3^3,2^2\cdot3^3,2^3\cdot3^3,2^4\cdot3^3$$

满足方程$Z_2(n)+1=S(n)$;同样可以推出当$S(n)=S(3^4)=9$时, 只有

$$n=3^4,2\cdot3^4,2^2\cdot3^4,2^3\cdot3^4,2^4\cdot3^4$$

满足方程$Z_2(n)+1=S(n)$.

最后考虑$S(n)=S(2^{\alpha})$.显然$n=1,2$不满足方程$Z_2(n)+1=S(n)$. 若$S(n)=S(4)=4$, 那么$n=4,12$.经验证$n=4,12$满足方程$Z_2(n)+1=S(n)$;当$S(n)=S(2^3)=4$时, 此时$n=8,24$.经验证这样的n均不满足方程$Z_2(n)+1=S(n)$;当$S(n)=S(2^4)=6$时, 此时$n=16,3\cdot16,5\cdot16,15\cdot16$.经检验它们均不满足方程$Z_2(n)+1=S(n)$; 当$S(n)=S(2^5)=8$时,

$$n=2^5,3\cdot2^5,5\cdot2^5,7\cdot2^5,15\cdot2^5,21\cdot2^5,35\cdot2^5,105\cdot2^5,$$

此时容易验证它们均不满足方程$Z_2(n)+1=S(n)$;当

$$S(n)=S(2^{\alpha})=2h,\alpha\geqslant\max\{6,h\}$$

时, 设$n=m\cdot2^{\alpha}$, 则$S(m)<S(2^{\alpha})$且$(m,2)=1$.此时若n满足方程$Z_2(n)+1=S(n)$, 则由函数$Z_2(n)$的定义, 知

$$n=m\cdot2^{\alpha}\left|\frac{(2h-1)^2(2h)^2}{4}\right.=(2h-1)^2h^2\ ,$$

由此推出$2^{\alpha}|h^2\leqslant(\alpha-1)^2<\alpha^2$, 这个不等式及整除性是不可能的, 因为应用数学归纳法容易证明当$\alpha\geqslant 6$时,$2^{\alpha}>(\alpha-1)^2\geqslant h^2$.

综合以上各种情况, 立刻完成定理3.8的证明.

3.8 关于Smarandache LCM函数与Smarandache函数的均值

对任意正整数n,著名的Smarandache函数$S(n)$定义为最小的正整数m使得$n|m!$.即就是$S(n)=\min\{m: m\in N, n|m!\}$, 而Smarandache LCM函数$SL(n)$定义为最小正整数$k$,使得$n|[1,2,\cdots,k]$,$[1,2,\cdots,k]$ 表示$1,2,\cdots,k$的最小公倍数. 关于这两个函数的性质, 许多学者进行了研究, 并取得了不少重要的结果[8,14,29,37−39]. 例如, 文献[39]研究$SL(n)$的值分布问题, 证明了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}(SL(n)-P(n))^2=\frac{2}{5}\cdot\zeta\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}\right)+O\left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\ln x}\right),$$

其中$P(n)$表示n的最大素因子.

文献[39]还讨论了方程$SL(n)=S(n)$的可解性, 并完全解决了该问题. 即证明了:任何满足该方程的正整数可表示为$n=12$或者$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}p$, 其中$p_1,p_2,\cdots,p_r,p$是不同的素数且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$, 是满足$p>p_i^{\alpha_i}(i=1,2,\cdots,r)$的正整数.

本节主要介绍利用初等及组合方法研究混合均值

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{S(n)}{SL(n)} \tag{3-18}$$

的渐近性质. 这一问题是有意义的, 因为式(3-18)的渐近性反映了这两个函数值分布的规律性, 如果渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{S(n)}{SL(n)}\sim x$$

成立, 那么就可以断定函数$S(n)$和$SL(n)$的值几乎处处相等!本节针对这一问题进行了研究, 并证明了它的正确性. 具体地说即证明了下面两个结论.

定理 3.9 对任意实数$x>1$有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{S(n)}{SL(n)}=x+O\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln x}\right).$$

定理 3.10 对任意实数$x>1$有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{P(n)}{SL(n)}=x+O\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln x}\right),$$

其中$P(n)$表示n的最大素因子.

显然定理中的误差项是非常弱的, 即误差项与主项仅差一个$\frac{\ln\ln x}{\ln x}$ 因子, 是否存在一个较强的渐近公式也是一个有趣的问题.

下面证明这两个定理. 只证明定理3.9, 类似地, 也可以推出定理3.10. 事实上经过简单变形立刻得到

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{S(n)}{SL(n)} &= \sum_{n\leqslant x}\frac{S(n)-SL(n)}{SL(n)}+\sum_{n\leqslant x}1\\ &= x+O\left(\sum_{n\leqslant x}\frac{|SL(n)-S(n)|}{SL(n)}\right).\end{aligned}\tag{3-19}$$

现在利用函数$S(n)$及$SL(n)$的性质以及初等与组合方法来估计式(3-19)中的误差项. 由$SL(n)$的性质知当n的标准分解式为$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$时有

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}.$$

若$SL(n)$为素数p,那么$S(n)$也为素数p.因此, 在这种情况下有$SL(n)-S(n)=0$.所以在式(3-19)的误差项中, 所有非零项必出现在那些使$SL(n)$不等于素数的整数n中, 即

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}\equiv p^{\alpha},\alpha\geqslant 2.$$

设A为区间$[1,x]$中所有满足上式条件n的集合, 对任意$n\in A$, 设$n=p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}=p^{\alpha}\cdot n_1$, 其中$(p,n_1)=1$. 现在分两种情况讨论:设$A=B+C$,其中$n\in B$如果$SL(n)=p^{\alpha}\geqslant\frac{\ln^2 x}{9(\ln\ln x)^2}$. $n\in C$如果$SL(n)=p^{\alpha}<\frac{\ln^2 x}{9(\ln\ln x)^2}$. 于是有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{|SL(n)-S(n)|}{SL(n)} &= \sum_{n\in B}\frac{|SL(n)-S(n)|}{SL(n)}+\sum_{n\in C}\frac{|SL(n)-S(n)|}{SL(n)}\\ &\leqslant \sum_{n\leqslant\frac{9x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}}\ \sum_{\substack{\frac{\ln^2 x}{9(\ln\ln x)^2}\leqslant p^{\alpha}\leqslant\frac{x}{n}\\ \alpha\geqslant 2}}1+\sum_{n\in C}1\equiv R_1+R_2.\end{aligned}\tag{3-20}$$

现在分别估计式(3-20)中的各项. 首先估计R_1. 注意到$p^{\alpha}\leqslant\ln^4 x$时有$\alpha\leqslant 4\ln\ln x$ 于是由素数定理有

$$\begin{aligned}R_1 &\leqslant \sum_{n\leqslant\frac{x}{\ln^4 x}}\ \sum_{\substack{p^{\alpha}\leqslant\frac{x}{n}\\ \alpha\geqslant 2}}1+\sum_{\frac{x}{\ln^4 x}\leqslant n\leqslant\frac{9x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}}\ \sum_{\substack{p^{\alpha}\leqslant\frac{x}{n}\\ \alpha\geqslant 2}}\\ &\ll \sum_{n\leqslant\frac{x}{\ln^4 x}}\ \sum_{p\leqslant\sqrt{\frac{x}{n}}}\ \sum_{\alpha\leqslant\ln x}1+\sum_{\frac{x}{\ln^4 x}\leqslant n\leqslant\frac{9x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}}\ \sum_{p\leqslant\sqrt{\frac{x}{n}}}\ \sum_{\alpha\leqslant 4\ln\ln x}1\\ &\ll \sum_{n\leqslant\frac{x}{\ln^4 x}}\sqrt{\frac{x}{n}}\frac{\ln x}{\ln\ln x}+\sum_{\frac{x}{\ln^4 x}\leqslant n\leqslant\frac{9x(\ln\ln x)^2}{\ln^2 x}}\sqrt{\frac{x}{n}}\\ &\ll \frac{x\ln\ln x}{\ln x}.\end{aligned}\tag{3-21}$$

现在估计R_2,注意到集合C中包含元素的个数不会超过整数$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$的个数, 其中$\alpha_i\leqslant 2\ln\ln x, p_i\leqslant\frac{\ln x}{3\ln\ln x}, i=1,2,\cdots$. 于是注意到素数分布公式

$$\sum_{p\leqslant y}\ln p=y+O\left(\frac{y}{\ln y}\right),\quad -\ln\left(1-\frac{1}{\ln p}\right)\sim\frac{1}{\ln p},$$

有

$$\begin{aligned}R_2=\sum_{n\in C}1&\leqslant\prod_{p\leqslant\frac{\ln x}{3\ln\ln x}}\left(\sum_{0\leqslant\alpha\leqslant 2\ln\ln x}p^{\alpha}\right)\\&=\prod_{p\leqslant\frac{\ln x}{3\ln\ln x}}\frac{p^2\ln\ln x}{1-\frac{1}{\ln p}}\\&\ll\prod_{p\leqslant\frac{\ln x}{3\ln\ln x}}\left(1-\frac{1}{\ln p}\right)^{-1}\exp\left(2\ln\ln x\sum_{p\leqslant\frac{\ln x}{3\ln\ln x}}\ln p\right)\\&\ll\exp\left(\frac{3}{4}\ln x+\sum_{p\leqslant\frac{\ln x}{3\ln\ln x}}\frac{1}{\ln p}\right)\\&\ll\frac{x}{\ln x},\end{aligned}\tag{3-22}$$

其中$\exp(y)=e^y$.

结合式(3-20),(3-21)及式(3-22), 推出估计式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{|SL(n)-S(n)|}{SL(n)}\ll\frac{x\ln\ln x}{\ln x}.\tag{3-23}$$

利用式了(3-19)及式(3-23)立刻推出渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{S(n)}{SL(n)}=x+O\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln x}\right).$$

于是完成了定理3.9的证明.

注意到当$SL(n)=p$为素数时,$S(n)=P(n)=p$; 当$SL(n)$不为素数时, $P(n)\leqslant S(n)\leqslant SL(n)$, 于是由证明定理3.9的方法立刻推出定理3.10.

3.9 关于Smarandache LCM函数及其对偶函数

对于任意的正整数n, Smarandache LCM函数的定义为

$$SL(n)=\min\{k:k|[1,2,\cdots,k],k\in N\}.$$

关于它的性质及函数方程有许多学者进行过研究, 得到了一些结果. 例如Murthy在文献[14]中证明了当n为素数时,$SL(n) = S(n)$. 同时还讨论了

$$SL(n) = S(n),\ S(n) \neq n$$

的可解性. 这里$S(n) = \min\{m : n|m!, m \in N\}$为Smaranache函数. 之后Le Maohua在文献[19] 解决了Murthy在文献[14]提出的问题, 得出当且仅当$n = 12$ 或者$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} p, (p > p_i^{\alpha_i}, i = 1, 2, \cdots, r)$时方程有解.

Lv Zhongtian 在文献[20]讨论了$SL(n)$的渐近性质, 得到了一个较好的均值计算公式

$$\sum_{n \leqslant x} SL(n) = \frac{\pi^2}{12} \frac{x^2}{\ln x} + \sum_{i=2}^{k} \frac{c_i \cdot x^2}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^{k+1} x}\right),$$

这里$x > 1$为实数, k为正整数,c为可计算的常数.

而对于任意的正整数n,著名的Smarandache LCM函数的对偶函数定义为

$$SL^*(n) = \max\{k : [1, 2, \cdots, k] | k, k \in N\}.$$

由$SL^*(n)$的定义可以容易推出,$SL^*(1) = 1$, $SL^*(2) = 2$, $SL^*(3) = 1$, $SL^*(4) = 2$, $SL^*(5) = 1$, $SL^*(6) = 3$, $SL^*(7) = 1$, $SL^*(8) = 2$, $SL^*(9) = 1$, $SL^*(10) = 2$,等等. 显然, 当n为奇数时, $SL^*(n) = 1$, 当n为偶数时, $SL^*(n) \geqslant 2$. 关于这个函数的其他性质, 许多学者也进行过研究, 取得了一系列研究成果, 见文献[4, 19 − 21].

例如在文献[21]中, Tian Chengliang研究了函数方程

$$\sum_{d|n} SL^*(d) = n$$

和

$$\sum_{d|n} SL^*(d) = \phi(n)$$

的可解性, 并得出前者只有唯一的正整数解$n = 1$, 而后者的正整数解为$n = 1, 3, 14$. 此外在文献[21]中, 他还研究了$SL^*(n)$的级数和及均值, 得到了一个有趣的结果:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{SL^*(n)}{n^s} = \zeta(s) \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{p} \frac{(p^{\alpha-1})(p^s - 1)}{[1, 2, \cdots, p^\alpha]}$$

和

$$\sum_{n \leqslant x} SL^*(n) = c \cdot x + o(\ln^2 x),$$

其中$\zeta(s)$为Riemann zeta-函数.

王妤在文献[59]研究了方程$\sum_{d|n} SL^*(d) = \sum_{d|n} S^*(d)$, 并得出其解为

(1)n为奇数;

(2)当$3\dagger n$时, 则$n = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $p_1 \geqslant 5$, $\alpha \geqslant 1$, $\alpha_i \geqslant 0$, $k \geqslant 1$, $i = 1, 2, \cdots, k$;

(3)当$3|n$时,则$n = 2^\alpha \cdot 3^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $p_2 \geqslant 5$, $\alpha \geqslant 1$, $\alpha_i \geqslant 0$, $k \geqslant 2$, $i = 1, 2, \cdots, k$.

设

$$A = \left\{ n : \sum_{d|n} SL^*(d) = \sum_{d|n} S^*(d), n \in N \right\},$$

定义

$$f(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \in A}}^{\infty} \frac{1}{n^s}, (Re(s) > 1),$$

则王妤还得到了关于其解的集合的一个恒等式

$$f(s) = \zeta(s)\left(1 - \frac{1}{12^s}\right),$$

其中$\zeta(s)$为Riemann zeta-函数.

本节的主要目的是利用初等数论和分析的方法研究函数方程

$$\prod_{d|n} SL^*(d) + 1 = 2^{\omega(n)} \tag{3-24}$$

的可解性, 并得到了其所有的正整数解, 即就是下面定理.

定理 3.11 对任意的正整数n, 函数方程(3-24)有解当且仅当$n = p^\alpha$, $\alpha \geqslant 1$, $p \geqslant 3$为素数.

证明: 由$SL^*(n)$的定义, 易知$n = 1, 2$显然不是方程(3-24)的解. 下面分两种情况进行讨论:

(1)若$n = p \geqslant 3$为素数, 则$\omega(n) = \omega(p) = 1$, $\prod\limits_{d|n} SL^*(d) + 1 = SL^*(1) \cdot SL^*(p) + 1 = 2$, 所以, 显然$n = p$为素数是方程(3-24)的解.

(2)若n为合数, 那么作如下分析:

1)当$n = 2^\alpha, \alpha \geqslant 1$时,易知$\omega(n) = \omega(2^\alpha) = 1$,而

$$\prod_{d|n} SL^*(d) + 1 = SL^*(1) \cdot SL^*(2) \cdots SL^*(2^\alpha) + 1 = 2^\alpha + 1,$$

则$2^\alpha + 1 = 2$,即$2^\alpha = 1$,可得$\alpha = 0$,这与$\alpha \geqslant 1$矛盾. 所以$n = 2^\alpha$,$\alpha \geqslant 1$不是(3-24)的解.

2)当$n = 2^\alpha p^\beta$时,$\alpha \geqslant 1$, $\beta \geqslant 1$, $p \geqslant 3$为素数, 此时$\omega(n) = \omega(2^\alpha p^\beta) = 2$, 而

由$SL^*(n)$的定义和性质易得 $\prod\limits_{d|2^\alpha p^\beta} SL^*(d)+1=\prod\limits_{m=0}^{\alpha}\prod\limits_{n=0}^{\beta} SL^*(2^m p^n)+1\geqslant 2^{\alpha+\beta}+1>4$,故$n=2^\alpha p^\beta$, $\alpha\geqslant 1$, $\beta\geqslant 1$, $p\geqslant 3$时, 方程(3-24)无解.

3)当$n=2^\alpha p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$时, $\alpha\geqslant 1$, $\alpha_i\geqslant 1$, $i=1,2,\cdots,k$, $k\geqslant 1$, $p_i\geqslant 3$ 为互异的素数.易知$\omega(n)=\omega(2^\alpha p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k})=k+1$, 而

$$\begin{aligned}\prod_{d|2^\alpha p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}} SL^*(d)+1&=\prod_{n=0}^{\alpha}\prod_{m_1=0}^{\alpha_1}\cdots\prod_{m_k=0}^{\alpha_k} SL^*(2^n p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k})+1\\&\geqslant 2^{\alpha+\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i}+1\\&\geqslant 2^{\alpha+k\cdot 1}+1\\&\geqslant 2^{k+1}+1\\&>2^{k+1}.\end{aligned}$$

所以$n=2^\alpha p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$时, 方程(3-24)也无解.

4)当$n=p^\alpha$时, $\alpha>1$, $p\geqslant 3$为素数. 立刻有$\omega(n)=\omega(p^\alpha)=1$,而由定义知$\prod\limits_{d|p^\alpha} SL^*(d)+1=\prod\limits_{m=0}^{\alpha} SL^*(p^m)+1=1+1=2$, 所以(3-24)式成立. 故$n=p^\alpha$是方程(3-24)的解.

5)当$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$时, $\alpha_i\geqslant 1$, $3\leqslant p_1<p_2\cdots<p_k$, $i=1,2,\cdots,k$, $k\geqslant 2$, 由于

$$\omega(n)=\omega(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k})=k,$$

$$\prod_{d|p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}} SL^*(d)+1=\prod_{m_1=0}^{\alpha_1}\prod_{m_2=0}^{\alpha_2}\cdots\prod_{m_k=0}^{\alpha_k} SL^*(p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k})+1=1+1=2,$$

此时必有$2=2^k$,即$k=1$,这和$k\geqslant 2$矛盾.所以$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$时, 方程(3-24)也无解.

综合以上讨论(1)和(2)可知, 方程(3-24)有解当且仅当$n=p^\alpha$, $\alpha\geqslant 1$, $p\geqslant 3$为素数,这样就完成了定理3.11的证明.

第四章 Smarandache序列研究

4.1 Smarandache LCM 比率序列I

设$(x_1, x_2, ..., x_t)$和$[x_1, x_2, ..., x_t]$分别表示$x_1, x_2, ..., x_t$的最大公因子和最小公倍数. 设r 是一个大于1的正整数. 对任意正整数n, 则

$$T(r, n) = \frac{[n, n+1, ..., n+r-1]}{[1, 2, ..., r]}$$

记作$SLR(r) = \{T(r, n)\}_{n=1}^{\infty}$称为阶为$r$的Smarandache LCM比率序列. Maohua Le [22] 研究了它的性质, 给出了关于$SLR(2), SLR(3)$ 和$SLR(4)$的递推公式, 很明显,

$$T(2, n) = \frac{1}{2}n(n+1).$$

$$T(3, n) = \begin{cases} \frac{1}{6}n(n+1)(n+2), \text{ 若}n \text{ 是奇数 ;} \\ \frac{1}{12}n(n+1)(n+2), \text{若}n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

$$T(4, n) = \begin{cases} \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3), \text{ 若}n \not\equiv 0(\mathrm{mod} 3); \\ \frac{1}{72}n(n+1)(n+2)(n+3), \text{ 若}n \equiv 0(\mathrm{mod} 3). \end{cases}$$

本节给出当$r = 5$时的递推公式, 即给出下面的定理.

定理 4.1 对于任意正整数n,有

$T(5, n) =$

$$\begin{cases} \frac{1}{120}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), & n\not\equiv 0(\text{mod}2)\text{且}n\not\equiv 0(\text{mod}3)\text{且}n\not\equiv 0(\text{mod}4) \\ & \text{且}n+1\not\equiv 0(\text{mod}3); \\ \frac{1}{240}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), & n\equiv 0(\text{mod}2)\text{且}n\not\equiv 0(\text{mod}3)\text{且}n\not\equiv 0(\text{mod}4) \\ & \text{且}n+1\not\equiv 0(\text{mod}3); \\ \frac{1}{360}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), & n\equiv 0(\text{mod}2),n\not\equiv 0(\text{mod}3)\text{或}n\not\equiv 0(\text{mod}2), \\ & n\not\equiv 0(\text{mod}3),n\not\equiv 0(\text{mod}4),n+1\not\equiv 0(\text{mod}3); \\ \frac{1}{480}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), & n\not\equiv 0(\text{mod}3),n\equiv 0(\text{mod}4),n+1\not\equiv 0(\text{mod}3); \\ \frac{1}{720}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), & n\equiv 0(\text{mod}2),n\not\equiv 0(\text{mod}3),n\not\equiv 0(\text{mod}4), \\ & n+1\equiv (\text{mod}3)\text{或}n\equiv 0(\text{mod}2),n\equiv 0(\text{mod}3), \\ & n\not\equiv 0(\text{mod}4); \\ \frac{1}{1440}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), & n\not\equiv 0(\text{mod}3),n\equiv 0(\text{mod}4),n+1\equiv 0(\text{mod}3) \\ & \text{或}n\equiv 0(\text{mod}3),n\equiv 0(\text{mod}4). \end{cases}$$

下面利用最大公约数和最小公倍数的性质来证明定理4.1. 虽然$[n,n+1,n+2,n+3,n+4]=[n(n+1),(n+2)(n+3),n+4]$, 但是$[n(n+1),(n+2)(n+3),n+4](n(n+1),(n+2)(n+3),n+4)\neq n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$. 所以对于任意两个整数的最大公约数与最小公倍数的性质推广到任意三个及三个以上整数时并不成立. 求解$T(r,n)$的递推公式, 关键是要求出$[n,n+1,n+2,n+3,n+4]$, 在此将n分别分类进行说明. 由于同余关系是等价关系, 所以用它可以把整数集划分为若干个等价类.

(1)若$n\equiv 0(\text{mod}2),n\not\equiv 0(\text{mod}3),n\not\equiv 0(\text{mod}4)$,

$[n,$	$n+1,$	$n+2,$	$n+3,$	$n+4]$
偶		偶		偶
2	3	4	5	6
10	11	12	13	14
14	15	16	17	18
22	23	24	25	26
26	27	28	29	30
34	35	36	37	38
38	39	40	41	42

相邻三偶数$[n,n+2,n+4]=\frac{1}{4}[n(n+2)(n+4)]$, 相邻奇数$[n+1,n+3]=(n+1)(n+3)$, 若$n+1\equiv 0(\text{mod}3)$时,则$n+4\equiv 0(\text{mod}3)$,所以

$$[n,n+1,n+2,n+3,n+4]=\begin{cases} \frac{1}{12}[n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)], \text{当}n+1\equiv 0(\text{mod}3)\text{时}, \\ \frac{1}{4}[n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)], \ \text{当}n+1\not\equiv 0(\text{mod}3)\text{时}. \end{cases}$$

(2)若$n\equiv 0(\bmod 3)$,$n\not\equiv 0(\bmod 2)$,

$[n,$	$n+1,$	$n+2,$	$n+3,$	$n+4]$
	偶		偶	
3	4	5	6	7
9	10	11	12	13
15	16	17	18	19
21	22	23	24	25
27	28	29	30	31
33	34	35	36	37

两相邻偶数$[n+1,n+3]=\frac{1}{2}[(n+1)(n+3)]$, 又因为$n\equiv 0(\bmod 3)$,$n+3\equiv 0(\bmod 3)$,所以$[n,n+3]=\frac{1}{3}[n(n+3)]$,所以此时

$$[n,n+1,n+2,n+3,n+4]=\frac{1}{6}[n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)].$$

(3)若$n\equiv 0(\bmod 4)$,$n\not\equiv 0(\bmod 3)$,

$[n,$	$n+1,$	$n+2,$	$n+3,$	$n+4]$
偶		偶		偶
4	5	6	7	8
8	9	10	11	12
16	17	18	19	20
20	21	22	23	24
28	29	30	31	32
32	33	34	35	36
40	41	42	43	44

三相邻偶数, 又因为$n\equiv 0(\bmod 4)$,$n+4\equiv 0(\bmod 4)$, 所以$[n,n+2,n+4]=\frac{1}{8}[n(n+2)(n+4)]$, 若$n+1\equiv 0(\bmod 3)$,则$n+4\equiv 0(\bmod 3)$,所以

$$[n,n+1,n+2,n+3,n+4]=\begin{cases}\frac{1}{8}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), & \text{当} n+1\not\equiv 0(\bmod 3)\text{时},\\ \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4), & \text{当} n+1\equiv 0(\bmod 3)\text{时}.\end{cases}$$

(4)若$n\equiv 0(\bmod 2)$,$n\equiv 0(\bmod 3)$,$n\not\equiv 0(\bmod 4)$,

$[n,$	$n+1,$	$n+2,$	$n+3,$	$n+4]$
偶		偶		偶
6	7	8	9	10
18	19	20	21	22
30	31	32	33	34
42	43	44	45	46
54	55	56	57	58

三相邻偶数$[n,n+2,n+4]=\frac{1}{4}[n(n+2)(n+4)]$,且$n\equiv n+3\equiv 0(\mathrm{mod}3)$,所以

$$[n,n+1,n+2,n+3,n+4]=\frac{1}{12}[n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)].$$

(5)若$n\equiv 0(\mathrm{mod}3)$,$n\equiv 0(\mathrm{mod}4)$,

$[n,$	$n+1,$	$n+2,$	$n+3,$	$n+4]$
偶		偶		偶
12	13	14	15	16
24	25	26	27	28
36	37	38	39	40
48	49	50	51	52
60	61	62	63	64

三相邻偶数$[n,n+2,n+4]=\frac{1}{8}[n(n+2)(n+4)]$,因为, $n\equiv n+4\equiv 0(\mathrm{mod}4)$,$n\equiv n+3\equiv 0(\mathrm{mod}3)$, 所以$[n,n+3]=\frac{1}{3}[n(n+3)]$,所以

$$[n,n+1,n+2,n+3,n+4]=\frac{1}{24}[n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)].$$

(6)若$n\not\equiv 0(\mathrm{mod}2)$,$n\not\equiv 0(\mathrm{mod}3)$,$n\not\equiv 0(\mathrm{mod}4)$

$[n,$	$n+1,$	$n+2,$	$n+3,$	$n+4]$
	偶		偶	
5	6	7	8	9
7	8	9	10	11
11	12	13	14	15
13	14	15	16	17
17	18	19	20	21
19	20	21	22	23
23	24	25	26	27
25	26	27	28	29

两相邻偶数$[n+1,n+3]=\frac{1}{2}[(n+1)(n+3)]$, 若$n+1\equiv 0(\bmod 3)$,$[n,n+1,n+2,n+3,n+4]=\frac{1}{6}[n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)]$; 若$n+1\equiv 0(\bmod 3)$, $[n,n+1,n+2,n+3,n+4]=\frac{1}{2}[n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)]$.
把以上六类进行整理, 相同条件的递推公式归为一类, 便得到了定理4.1.

4.2 Smarandache LCM 比率序列II

上一节给出了Smarandache LCM比率序列分别在阶等于2,3,4,5时的递推公式, 这一节将研究Smarandache LCM比率序列的一般通项公式, 给出Smarandache LCM比率序列分别关于阶r、关于n的一般通项公式, 即得到了下面的几个结果.

定理 4.2 对任意自然数n,r，我们有如下递推公式:

$$T(r+1,n)=\frac{n+r}{r+1}\frac{([1,2,...,r],r+1)}{([n,n+1,...,n+r-1],n+r)}T(r,n),$$

推论 4.1 如果$r+1$ 和$n+r$ 都是素数，则我们有一个相对简单的公式:

$$T(r+1,n)=\frac{n+r}{r+1}T(r,n).$$

定理 4.3 对任意自然数n,r，我们有另一个递推公式:

$$T(r,n+1)=\frac{n+r}{n}\frac{(n,[n+1,...,n+r])}{([n,n+1,...,n+r-1],n+r)}T(r,n).$$

推论 4.2 如果n 和$n+r$ 都是素数且$r<n$，则我们也有一个更简单的公式:

$$T(r,n+1)=\frac{n+r}{n}\cdot T(r,n);$$

如果n 和$n+r$ 都是素数且$r\geqslant n$，则我们有

$$T(r,n+1)=(n+r)\cdot T(r,n).$$

定理 4.4 对任意自然数n,r，我们有递推公式：

$$\begin{aligned}T(r+1,n+1)=&\frac{n+r}{n}\cdot\frac{n+r+1}{r+1}\cdot\frac{([1,2,...,r],r+1)}{([n+1,...,n+r],n+r+1)}\\&\cdot\frac{(n,[n+1,...,n+r])}{([n,n+1,...,n+r-1],n+r)}\cdot T(r,n).\end{aligned}$$

为了证明这几个定理, 需要以下几个引理.

引理 4.1 对任意正整数a和b, 有$(a,b)[a,b]=ab$.

引理 4.2 对任意正整数s,t且$s<t$, 有

$$(x_1,x_2,...,x_t)=((x_1,...,x_s),(x_{s+1},...,x_t))$$

和

$$[x_1,x_2,...,x_t]=[[x_1,...,x_s],[x_{s+1},...,x_t]].$$

引理4.1和4.2的证明请参阅文献[6].

下面来证明定理4,2. 首先根据根据$T(r,n)$ 的定义, 引理4.1和4.2, 有

$$\begin{aligned}[n,n+1,...,n+r]&=[[n,n+1,...,n+r-1],n+r]\\&=\frac{[n,n+1,...,n+r-1](n+r)}{([n,n+1,...,n+r-1],n+r)},\end{aligned}$$

$$[1,2,\cdots,r+1]=[[1,2,\cdots,r],r+1]=\frac{(r+1)[1,2,\cdots,r]}{([1,2,\cdots,r],r+1)},$$

于是，我们得到关于$T(r+1,n)$的递推公式

$$\begin{aligned}T(r+1,n)&=\frac{[n,n+1,...,n+r]}{[1,2,...,r+1]}\\&=\frac{[[n,n+1,...,n+r-1],n+r]}{[[1,2,...,r],r+1]}\\&=\frac{\frac{(n+r)[n,n+1,...,n+r-1]}{([n,n+1,...,n+r-1],n+r)}}{\frac{(r+1)[1,...,r]}{([1,2,...,r],r+1)}}\\&=\frac{n+r}{r+1}\frac{[n,n+1,...,n+r-1]}{[1,2,...,r]}\frac{([1,2,...,r],r+1)}{([n,n+1,...,n+r-1],n+r)}\\&=\frac{n+r}{r+1}\frac{([1,2,...,r],r+1)}{([n,n+1,...,n+r-1],n+r)}T(r,n).\end{aligned}$$

这样就完成了定理4.2的证明.

推论4.1的证明. 当$r+1$ 和$n+r$ 都是素数时, 显然有

$$([1,2,\cdots,r],r+1)=1,$$

$$([n,n+1,\cdots,n+r-1],n+r)=1,$$

则由定理4.2, 我们有

$$\begin{aligned}T(r+1,n)&=\frac{n+r}{r+1}\frac{([1,2,...,r],r+1)}{([n,n+1,...,n+r-1],n+r)}T(r,n)\\&=\frac{n+r}{r+1}T(r,n).\end{aligned}$$

这就证明了推论4.1.

定理4.3的证明: 同样根据$T(r,n)$的定义和引理4.1与引理4.2来证明定理4.3. 首先由引理4.1和引理4.2, 有

$$[n,[n+1,n+2,\cdots,n+r]]=\frac{n[n+1,n+2,\cdots,n+r]}{(n,[n+1,n+2,\cdots,n+r])},$$

于是

$$\begin{aligned}&[n+1,n+2,\cdots,n+r]\\&=\frac{[n,[n+1,n+2,\cdots,n+r]]\cdot(n,[n+1,n+2,\cdots,n+r])}{n}\\&=\frac{[n,n+1,n+2,\cdots,n+r]\cdot(n,[n+1,n+2,\cdots,n+r])}{n},\end{aligned}$$

于是得出关于$T(r,n+1)$的递推公式

$$\begin{aligned}T(r,n+1)&=\frac{[n+1,...,n+r]}{[1,2,...,r]}\\&=\frac{[n,n+1,...,n+r](n,[n+1,...,n+r])}{n}\frac{1}{[1,2,...,r]}\\&=\frac{(n,[n+1,...,n+r])}{n[1,2,...,r]}\frac{[n,n+1,...,n+r-1](n+r)}{([n,n+1,...,n+r-1],n+r)}\\&=\frac{n+r}{n}\frac{(n,[n+1,...,n+r])}{([n,n+1,...,n+r-1],n+r)}\frac{[n,n+1,...,n+r-1]}{[1,2,...,r]}\\&=\frac{n+r}{n}\frac{(n,[n+1,...,n+r])}{([n,n+1,...,n+r-1],n+r)}T(r,n).\end{aligned}$$

这就完成了定理4.3的证明.

推论4.2的证明. 当n 是素数且$r<n$ 时, $[n+1,n+2,\cdots,n+r]$ 必不含有素因子n, 则有

$$(n,[n+1,n+2,\cdots,n+r])=1;$$

同时, 若$n+r$ 也是素数, 则必然有

$$([n,n+1,\cdots,n+r-1],n+r)=1.$$

因此可以得到

$$T(r,n+1)=\frac{n+r}{n}\frac{(n,[n+1,...,n+r])}{([n,n+1,...,n+r-1],n+r)}T(r,n)=\frac{n+r}{n}T(r,n).$$

当n是素数且$r\geqslant n$时, $[n+1,n+2,\cdots,n+r]$ 必含素因子n, 因此

$$(n,[n+1,n+2,\cdots,n+r])=n,$$

但同时由于$n+r$ 是素数, 因此有

$$\begin{aligned}T(r,n+1)&=\frac{n+r}{n}\frac{(n,[n+1,...,n+r])}{([n,n+1,...,n+r-1],n+r)}T(r,n)\\&=(n+r)T(r,n).\end{aligned}$$

这就证明了推论4.2.

定理4.4的证明: 应用定理4.2和定理4.3 很容易得到定理4.4的结果, 即

$$\begin{aligned}&T(r+1,n+1)\\=&\frac{n+r+1}{r+1}\frac{([1,2,...,r],r+1)}{([n+1,...,n+r],n+r+1)}T(r,n+1)\\=&\frac{(n+r+1)(n+r)}{(r+1)n}\frac{([1,2,...,r],r+1)}{([n+1,...,n+r],n+r+1)}\frac{(n,[n+1,...,n+r])}{([n,...,n+r-1],n+r)}T(r,n).\end{aligned}$$

这就完成了定理4.4的证明.

4.3 Smarandache 行列式

4.3.1 Smarandache循环行列式

对于任何正整数n,$n\times n$行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 2\cdots n-1 & n\\ 2 & 3\cdots\quad n & 1\\ \vdots & \vdots\qquad\vdots & \vdots\\ n-1 & n\cdots n-3 & n-2\\ n & 1\cdots n-2 & n-1\end{vmatrix} \tag{4-1}$$

称为n阶Smarrandache循环行列式, 记为$SCND(n)$.

设a,d是复数,$n \times n$行列式

$$\begin{vmatrix} a & a+d & \cdots & a+(n-2)d & a+(n-1)d \\ a+d & a+2d & \cdots & a+(n-1)d & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a+(n-2)d & a+(n-1)d & \cdots & a+(n-4)d & a+(n-3)d \\ a+(n-1)d & a & \cdots & a+(n-3)d & a+(n-2)d \end{vmatrix} \tag{4-2}$$

称为关于数对(a,d)的n阶Smarrandache循环算术级数行列式且表示为$SCAD(n;a,d)$.

在文献[34]中, Murthy给出了下面两个引理.

引理 4.3 对于任何正整数n,

$$SCND(n) = (-1)^{\frac{n}{2}} n^{n-1} \frac{(n+1)}{2}. \tag{4-3}$$

引理 4.4 对于任意正整数n与任意复数对a,d, 有

$$SCAD(n;a,d) = \begin{cases} a, & \text{当}n=1\text{时}, \\ (-1)^{\frac{n}{2}}(nd)^{n-1}\frac{(a+(n-1)d)}{2}, & \text{当}n>1\text{时}. \end{cases} \tag{4-4}$$

而在文献[35]中, Le Maohua证明了关于$SCND(n)$与$SCAD(n;a,d)$的猜测. 即Le Maohua利用已知值的行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_3 & a_4 & \cdots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \end{vmatrix} = \prod_{x^n=1} (a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^n) \tag{4-5}$$

证明了引理4.3与4.4实际上可以直接计算即可.

如要计算式(4-1), 只要从最底的第n行开始, 上一行的-1倍加到下一行, 而第一行不动, 使

$$SCND(n) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

然后第2列到第n列全部加到第一列, 再把第一列展开后得到结论,即

$$SCND(n)=\begin{vmatrix} n(n-1)/2 & 2 & \cdots n-1 & n \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & \cdots 1 1-n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots 1 & 1 \\ 1-n & \cdots 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=(-1)^{\frac{n}{2}}n^{n-1}\frac{(n+1)}{2}.$$

同样, 式(4-2)也可用这种方法计算.

把$SCND(n)$一般化, 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$是n个复数,$n \times n$ 行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \cdots a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 \cdots & a_n & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n \cdots a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_n & a_1 \cdots a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} \tag{4-6}$$

称为关于参数$a_1, a_2, \cdots, a_n$的n阶Smarandache循环行列式且表示为$SCD(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.对于$n$阶Smarandache循环行列式$SCD(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, 应用式(4-5), 可得到下面的定理.

定理 4.5 对于n个任意复数$a_1, a_2, \cdots, a_n$,

$$SCD(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (-1)^r \prod_{x^n=1} (a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}), \tag{4-7}$$

其中

$$r = \begin{cases} \frac{n}{2} - 1, & \text{若}n\text{是偶数}, \\ (n-1)/2, & \text{若}n\text{是奇数}. \end{cases}$$

$SCD(a_1, a_2, \cdots, a_n)$的另一种特殊情况是: 设$a, q$两个复数, $n \times n$行列式

$$\begin{vmatrix} a & aq & \cdots & aq^{n-2} & aq^{n-1} \\ aq & aq^2 & \cdots & aq^{n-1} & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ aq^{n-2} & aq^{n-1} & \cdots & aq^{n-4} & aq^{n-3} \\ aq^{n-1} & a & \cdots & aq^{n-3} & aq^{n-2} \end{vmatrix} \tag{4-8}$$

称为关于(a, q)的n阶Smarandache循环几何级数行列式且表示为$SCGD(n; a, q)$.

对于, n阶Smarandache循环几何级数行列式$SCGD(n; a, q)$, 有如下的定理:

定理 4.6 对于任意正整数n与任意复数对a, q,

$$SCGD(n; a, q) = (-1)^r a^n (1 - q^n)^{n-1}. \tag{4-9}$$

定理4.6的证明:从式(4-6)、(4-8)有

$$SCGD(n; a, q) = SCD(a, aq, aq^2, \cdots, aq^{n-1}),$$

再由式(4-7), 可以得到

$$\begin{aligned} SCD(a, aq, aq^2, \cdots, aq^{n-1}) &= (-1)^r \prod_{x^n=1} (a + aqx + aq^2x^2 + \cdots + aq^{n-1}x^{n-1}) \\ &= (-1)^r a^n \prod_{x^n=1} (1 + qx + q^2x^2 + \cdots + q^{n-1}x^{n-1}). \end{aligned}$$

如果$x^n = 1$,则$(1 + qx + q^2x^2 + \cdots + q^{n-1}x^{n-1})(1 - qx) = 1 - q^n$,由于

$$\prod_{x^n=1} (1 - qx) = q^n \prod_{x^n=1} \left(\frac{1}{q} - x\right) = q^n \left(\frac{1}{q^n} - x\right) = 1 - q^n,$$

可得到式(4-9). 所以定理4.6成立. 实际上, 引理4.3、引理4.4、定理4.6都是定理4.5的特殊情况.

4.3.2 Smarandache 双对称行列式

在文献[35]中, 对于任意正整数n, $n \times n$行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & n-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & \cdots & 3 & 2 \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix} \tag{4-10}$$

称为n阶Smarandache双对称行列式且表示为$SBND(n)$.

设a,b两复数,$n\times n$行列式

$$\begin{vmatrix} a & a+d & \cdots a+(n-2)d & a+(n-1)d \\ a+b & a+2d & \cdots a+(n-1)d & a+(n-2)d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a+(n-2)d & a+(n-1)d\cdots & a+2d & a+d \\ a+(n-1)d & a+(n-2)d\cdots & a+d & a \end{vmatrix} \tag{4-11}$$

称为关于(a,d)的n阶Smarandache双对称算术级数行列式且表示为$SBAD(n;a,d)$.

关于n阶Smarandach双对称行列式$SBND(n)$与Smarandach双对称算术级数行列式$SBAD(n;a,d)$，Le Maohua证明了下面的引理4.6,引理4.7.

引理 4.5 对于任意正整数n,

$$SBND(n)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}2^{n-1}(n+1). \tag{4-12}$$

引理 4.6 对于任意正整数n与任意复数对a,d,

$$SBAD(n;a,d)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}2^{n-2}d^{n-1}\left(2a+(n-1)d\right). \tag{4-13}$$

设a,d是复数, $n\times n$行列式

$$\begin{vmatrix} a & aq & \cdots aq^{n-2} & aq^{n-1} \\ aq & aq^2 & \cdots aq^{n-1} & aq^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ aq^{n-2} & aq^{n-1}\cdots & aq^2 & aq \\ aq^{n-1} & aq^{n-2}\cdots & aq & a \end{vmatrix} \tag{4-14}$$

称为关于(a,q)的n阶Smarandache双对称几何级数行列式且表示为$SBGD(n;a,q)$.

关于n阶Smarandache双对称几何级数行列式$SBGD(n;a,q)$,有下面的定理.

定理 4.7 对于任意正整数n与复数对a,d,

$$SCGD(n;a,d)=\begin{cases} 0, & 当n=2时, \\ (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a^nq^{n(n-2)(n-1)}(q^2-1)^{n-1}, & 当n\neq 2时. \end{cases} \tag{4-15}$$

定理4.7的证明:要计算式(4-14), 只需计算

$$\begin{vmatrix} 1 & q & \cdots a^{n-2} & q^{n-1} \\ q & q^2 & \cdots q^{n-1} & q^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q^{n-2} & q^{n-1}\cdots & q^2 & q \\ q^{n-1} & q^{n-2}\cdots & q & 1 \end{vmatrix}. \tag{4-16}$$

由式(4-14), 当$n=1$或$n=2$时, 可得式(4-15)成立. 因此可假定$n>2$. 把式(4-16)的第2列提出公因子q,第2 列的-1倍加到第1列, 然后按第1列展开, 得

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & q & \cdots & a^{n-2} & q^{n-1} \\ q & q^2 & \cdots & q^{n-1} & q^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ q^{n-2} & q^{n-1} & \cdots & q^2 & q \\ q^{n-1} & q^{n-2} & \cdots & q & 1 \end{vmatrix}
&= q(-1)^{n+1}(q^{n-1}-q^{n-3})\cdot \begin{vmatrix} 1 & q & \cdots & a^{n-2} & q^{n-1} \\ q & q^3 & \cdots & q^{n-1} & q^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ q^{n-3} & q^{n-1} & \cdots & q^3 & q^2 \\ q^{n-2} & q^{n-2} & \cdots & q^2 & q \end{vmatrix} \\
&= q(-1)^{n-1}(q^{n-1}-q^{n-3})q^2(-1)^n\cdot(q^{n-2}-q^{n-4})\cdots \\
&\quad q^{n-2}(-1)^4(q^2-1)\begin{vmatrix} 1 & q^{n-1} \\ q & q^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{(n-2)(n-1)}(q^2-1)^{n-1}.
\end{aligned}$$

由此, 可得到式(4-15). 定理4.7得证.

推广$SBND(n)$到一般情形. 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$,是n 个复数, $n\times n$行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \cdots & a_3 & a_2 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \end{vmatrix} \tag{4-17}$$

称为关于参数$a_1, a_2, \cdots, a_n$的n阶Smarandache双对称行列式且表示为$SBD(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 对于$SBD(a_1, a_2, \cdots, a_n)$的计算, 还是一个未解决的问题.

4.4 Smarandache 完全数

设N^+是全体正整数的集合. 对于正整数n, 设

$$S(n)=\min\{k|k\in N^+, n|k!\}. \tag{4-18}$$

如此的$S(n)$称为关于n的Smarandache函数. 设n是正整数, 如果n的不同约数之和等于$2n$, 则称n是完全数. 长期以来, 完全数一直是数论中的一个引人关注的问题[41]. 最近, Ashbacher[42]将完全数的概念推广到了Smarandache函数范围, 将满足

$$\sum_{d|n} S(d)=n+1+S(n) \tag{4-19}$$

的正整数n称为Smarandache完全数.对此, Ashbacher证明了: 当$n\leqslant 10^6$时, 仅有Smarandache完

全数12. 本节将进一步介绍Smarandache完全数, 即证明了:

定理 4.8 仅有Smarandache完全数12.

引理 4.7 如果

$$n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k} \tag{4-20}$$

是正整数n的标准分解式, 则

$$S(n) = \max\left\{S(p_1^{r_1}), S(p_2^{r_2}), \cdots, S(p_k^{r_k})\right\}. \tag{4-21}$$

证明:参见文献[43].

引理 4.8 对于素数p和正整数r, 必有$S(p^r) \leqslant pr$.

证明:参见文献[43].

引理 4.9 对于正整数n,设$d(n)$是n的除数函数. 此时,$d(n)$是积性函数;当(4-20)是n的标准分解式,则

$$d(n) = (r_1 + 1)(r_2 + 1) \cdots (r_k + 1). \tag{4-22}$$

证明:参见文献[44]中的例6.4.2.

引理 4.10 不等式

$$\frac{n}{d(n)} < 2, n \in N \tag{4-23}$$

仅有解$n = 1, 2, 3, 4, 6$.

下面证明定理4.8. 设n是适合$n \neq 12$的Smarandache完全数. 根据文献[41]中的结果, 可知$n > 10^6$. 设(4-20)是n的标准分解式. 根据引理4.7可知

$$S(n) = S(p^r), \tag{4-24}$$

其中

$$p = p_j, r = r_j, 1 \leqslant j \leqslant k. \tag{4-25}$$

从(4-24)可知

$$n | S(p^r)!, \tag{4-26}$$

所以对于n的任何约数d都有

$$S(d) \leqslant S(p^r). \tag{4-27}$$

对于正整数n, 设

$$g(n) = \sum_{d|n} S(d). \tag{4-28}$$

此时, 从(4-19)和(4-28)可知n适合

$$g(n) = n + 1 + S(n). \tag{4-29}$$

又设$d(n)$是n的除数函数.从(4-27)和(4-29)可得

$$d(n)S(p^r) > n. \tag{4-30}$$

由于从(4-20)和(4-24)可知$\gcd(p^r, n/p^r) = 1$, 所以

$$n = p^r m, m \in N, \gcd(p^r, m) = 1. \tag{4-31}$$

又从引理4.9可知,$d(n)$是积性函数, 故从(4-31)可得

$$d(n) = d(p^r)d(m) = (r+1)d(m). \tag{4-32}$$

将(4-31)和(4-32)代入(4-30)即得

$$\frac{(r+1)S(p^r)}{p^r} > 3\frac{m}{d(m)}. \tag{4-33}$$

设$f(n) = \frac{n}{d(n)}$, 此时(4-33)可写成

$$\frac{(r+1)S(p^r)}{p^r} > f(m). \tag{4-34}$$

于是, 根据引理4.8和引理4.10, 从(4-34)可知: 仅有Smarandache完全数12. 定理4.8证毕.

4.5 Smarandache $3n$ 数字序列

对任意正整数n, 著名的Smarandache $3n$数字序列a_n定义为

$$a_n = 13, 26, 39, 412, 515, 618, 721, 824, \ldots.$$

该数列的每一个数都可以分为两部分, 使得第2部分是第1部分的3倍. 例如, $a_{12} = 1236$, $a_{20} = 2060$, $a_{41} = 41123$, $a_{333} = 333999, \ldots$.这一数列是著名数论专家Smarandache教授在文献[7]和文献[46]中提出的, 同时他建议人们研究该数列的性质. 关于这一问题, 已引起不少学者的注意, 并得到一些研究成果[47−49].在文献[49]中, 张文鹏猜测Smarandache $3n$数字序列中可能没有完全平方数, 虽然文献[49]中没有完全解决该猜想, 但证明了以下结论:

(a)当n为无平方因子数时, a_n不可能是完全平方数;

(b)当n为完全平方数时, a_n不可能是完全平方数;

(c)如果a_n是一个完全平方数, 那么有$n = 2^{2a_1} \cdot 3^{2a_2} \cdot 5^{2a_3} \cdot 11^{2a_4} \cdot n_1$, 其中$(n_1, 330) = 1$.

这些结论为猜想的正确性提供了重要依据, 揭示了研究该问题的一些思路和方法, 从另一方面显示出Smarandache $3n$数字序列的一些内在性质. 关于这一数列前n项的求和问题是有意义的, 也就是说是否存在$a_1 + a_2 + ... + a_N$ 的一个确切的求和公式或者渐近公式? 经过简单推导和计算, 可以给出一个复杂的计算公式, 其结果与N的确切形式有关, 但是形式并不理想, 而且从中不能得到主要部分, 即不能得到渐近公式. 于是, 本节考虑均值

$$\ln a_1 + \ln a_2 + ... \ln a_N$$

的渐近性问题, 利用初等方法及整数的进位性质证明了下面的结论.

定理 4.9 对任意充分大的正整数N, 有渐近公式

$$\sum_{n \leqslant N} \ln a_n = 2N \cdot \ln N + O(N).$$

下面证明该定理. 首先考虑a_n的结构, 设n为k位数, 即$n = b_k b_{k-1} ... b_2 b_1$,其中$1 \leqslant b_k \leqslant 9$, $0 \leqslant b_i \leqslant 9 (i = 1, 2, ..., k-1)$. 于是由乘法的进位法则可知, 当

$$\underbrace{333...34}_{k-1} \leqslant n \leqslant \underbrace{333...3}_{k}$$

时, $3n$为k位数; 当

$$\underbrace{333...34}_{k} \leqslant n \leqslant \underbrace{333...33}_{k+1}$$

时, $3n$为$k+1$位数. 由a_n的定义立刻得到

$$a_n = n \cdot (10^k + 3),$$

或

$$a_n = n \cdot (10^{k+1} + 3).$$

对任意充分大的正整数N, 显然存在正整数M, 使得:

$$\underbrace{333...33}_{M} < n \leqslant \underbrace{333...33}_{M+1}. \tag{4-35}$$

于是由前面的分析, 有恒等式

$$\prod_{1 \leqslant n \leqslant N} a_n = \prod_{n=1}^{3} a_n \cdot \prod_{n=4}^{33} a_n \cdots \prod_{n=\frac{1}{3}(10^{M-1}-1)+1}^{\frac{1}{3}(10^M - 1)} a_n \cdot \prod_{n=\frac{1}{3}(10^M-1)+1}^{N} a_n =$$

$$N!(10+3)^3 \cdot (100+3)^{30} \cdot ... \cdot (10^M + 3)^{3 \cdot 10^{M-1}} \cdot (10^{M+1}+3)^{N - \frac{1}{3}(10^M - 1)}. \tag{4-36}$$

注意到当$x \to 0$时, 有估计式$\ln(1+x) = x + O(x^2)$,所以

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{M} \ln(10^k+3)^{3\cdot 10^{k-1}} \\
=&\sum_{k=1}^{M} 3\cdot 10^{k-1} \cdot \left(k\cdot \ln 10 + \frac{3}{10^k} + O\left(\frac{1}{10^{2k}}\right)\right) \\
=&\sum_{k=1}^{M} k\cdot 10^{k-1}\cdot 3\ln 10 + \frac{9}{10}M + O(1) \\
=&\frac{1}{3}M\cdot 10^M \cdot \ln 10 - \frac{1}{27}(10^M-1)\cdot \ln 10 + \frac{9}{10}M + O(1) \\
=&\frac{1}{3}M\cdot 10^M\cdot \ln 10 + O(N).
\end{aligned} \tag{4-37}$$

$$\begin{aligned}
&\ln(10^{M+1}+3)^{N-\frac{1}{3}\left(10^M-1\right)} = \left(N - \frac{1}{3}\left(10^M-1\right)\right)\ln(10^{M+1}+3) \\
=&\left(N-\frac{1}{3}\left(10^M-1\right)\right)(M+1)\ln 10 + O(1) \\
=&N\cdot M\cdot \ln 10 - \frac{1}{3}\cdot M\cdot 10^M\cdot \ln 10 + O(N).
\end{aligned} \tag{4-38}$$

应用Euler求和公式或定积分的性质, 容易得到

$$\ln(N!) = \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \ln n = N\cdot \ln N - N + O(1). \tag{4-39}$$

注意到式(4-35), 不难得出估计式

$$10^M < N \leqslant 10^{M+1},$$

或者

$$\ln N = M\ln 10 + O(1). \tag{4-40}$$

结合恒等式(4-36)及渐进公式(4-37)-(4-40), 立刻得到渐近公式

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\leqslant N} \ln a_n \\
=&\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \ln n + \sum_{k=1}^{M} \ln(10^k+3)^{3\cdot 10^{k-1}} + \ln(10^{M+1}+3)^{N-\frac{1}{3}\left(10^M-1\right)} \\
=&2N\cdot \ln N + O(N).
\end{aligned}$$

于是定理4.9得证. 显然, 这个渐近公式还比较粗糙, 是否存在更精确的渐近公式, 还有待于进一步研究.

4.6 Smarandache kn 数字序列

对于$\forall k \in N^{+}$, 著名的Smarandache kn 数字序列$\{a\left(k,n\right)\}$定义为这样的数集, 该集合中的每一个数都可以分成两部分, 使得第二部分是第一部分的k倍. 例如上一节给出了Smarandache 3n数字序列

$$\{a\left(3,n\right)\}=\{13,26,39,412,515,618,721,824,...\},$$

即就是该数列的每一个数都可以分为两部分, 第二部分是第一部分的3倍.

上一节中给出了关于

$$\ln a\left(3,n\right)$$

的均值性质, 证明了渐近公式

$$\sum_{n\leqslant N}\ln a\left(3,n\right)=2N\cdot\ln N+O\left(N\right).$$

关于这一数列的其他性质, 至今似乎还没有人研究, 研究这个数列的性质是有意义的, 至少可以反映出这些特殊数列的特征及分布性质. 本节所涉及的初等数论知识可参见文献[6]. 本节利用初等及组合方法研究了

$$\frac{n}{a\left(k,n\right)}$$

的均值性质, 并给出了几个有趣的渐近公式.

定理 4.10 设$k\in N^{+}, 2\leqslant k\leqslant 5$, 则对任意充分大的正数$x$, 有渐近公式

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{n}{a\left(k,n\right)}=\frac{9}{k\cdot 10\cdot\ln 10}\ln x+O\left(x\right).$$

定理 4.11 设$k\in N^{+}, 6\leqslant k\leqslant 9$,则当实数$x$ 充分大时, 仍有渐近公式

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{n}{a\left(k,n\right)}=\frac{9}{k\cdot 10\cdot\ln 10}\ln x+O\left(x\right).$$

特别地, 当$k=3$及6 时, 由定理4.10还可以推出下面推论:

推论 4.3 对任意充分大的正数x, 有渐近公式

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{n}{a\left(3,n\right)}=\frac{3}{10\cdot\ln 10}\ln x+O\left(x\right).$$

推论 4.4 对任意充分大的正数x, 有渐近公式

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{n}{a\left(6,n\right)}=\frac{3}{20\cdot\ln 10}\ln x+O\left(x\right).$$

显然这几个渐近公式不是十分精确, 是否存在更精确的渐近公式仍然是一个公开的问题, 将是继续研究的目标.

下面证明这两个定理. 只证明定理4.10 中$k=2$及3 的情况, 类似地可以推出定理4.10 中$k=4,5$及定理4.11. 首先证明定理4.10中$k=2$. 考虑到$a(2,n)$的结构, 设n的十进制表示为k 位数, 即就是

$$n=b_kb_{k-1}\cdots b_2b_1,$$

其中

$$1\leqslant b_k\leqslant 9, 0\leqslant b_i\leqslant 9, i=1,2,\cdots,k-1.$$

于是由乘法的进位法则可知, 当$10^{k-1}\leqslant n\leqslant 5\cdot 10^{k-1}-1$ 时, $2n$ 为k 位数; 当$5\cdot 10^{k-1}\leqslant n\leqslant 10^k-1$时, $2n$ 为$k+1$位数. 由$a(2,n)$的定义立刻得到

$$a(2,n)=n\cdot\left(10^k+2\right),$$

或者

$$a(2,n)=n\cdot\left(10^{k+1}+2\right).$$

对任意充分大的正数x, 显然$\exists M\in N^+$使得

$$5\cdot 10^M\leqslant x<5\cdot 10^{M+1}, \tag{4-41}$$

于是有恒等式

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{n}{a(2,n)}\\
=&\sum_{n=1}^{4}\frac{n}{a(2,n)}+\sum_{n=5}^{49}\frac{n}{a(2,n)}+\sum_{n=50}^{499}\frac{n}{a(2,n)}+\sum_{n=500}^{4999}\frac{n}{a(2,n)}+\\
&\cdots+\sum_{n=5\cdot 10^{M-1}}^{5\cdot 10^M-1}\frac{n}{a(2,n)}+\sum_{5\cdot 10^M\leqslant n\leqslant x}\frac{n}{a(2,n)}\\
=&\sum_{n=1}^{4}\frac{1}{10+2}+\sum_{n=5}^{49}\frac{1}{10^2+2}+\sum_{n=50}^{499}\frac{1}{10^3+2}+\sum_{n=500}^{4999}\frac{1}{10^4+2}\\
&\cdots+\sum_{n=5\cdot 10^{M-1}}^{5\cdot 10^M-1}\frac{1}{10^{M+1}+2}+\sum_{5\cdot 10^M\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{10^{M+2}+2}\\
=&\frac{5-1}{10+2}+\frac{50-5}{10^2+2}+\frac{500-50}{10^3+2}+\frac{5000-500}{10^4+2}+\\
&\cdots+\frac{5\cdot 10^M-5\cdot 10^{M-1}}{10^{M+1}+2}+O\left(\frac{x-5\cdot 10^M}{10^{M+2}+2}\right)\\
=&\frac{9\cdot 10}{2\cdot\left(10^2+2\right)}+\frac{9\cdot 10^2}{2\cdot\left(10^3+2\right)}+\frac{9\cdot 10^3}{2\cdot\left(10^4+2\right)}+\cdots+\frac{9\cdot 10^M}{2\cdot\left(10^{M+1}+2\right)}+O(1)
\end{aligned}$$

$$=\frac{9\cdot\left(10^2+2-2\right)}{20\cdot\left(10^2+2\right)}+\frac{9\cdot\left(10^3+2-2\right)}{20\cdot\left(10^3+2\right)}+\frac{9\left(10^4+2-2\right)}{20\left(10^4+2\right)}+$$
$$\cdots+\frac{9\left(10^{M+1}+2-2\right)}{20\left(10^{M+1}+2\right)}+O\left(1\right)$$
$$=\frac{9}{20}M+O\left(\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{10^m}\right)+O\left(1\right)$$
$$=\frac{9}{20}M+O\left(1\right). \tag{4-42}$$

注意到式(4-41)，取对数后有估计式

$$M\ln 10+\ln 5\leqslant x<\ln 5+(M+1)\ln 10$$

或者

$$M=\frac{1}{\ln 10}\ln x+O\left(1\right).$$

所以由式(4-42) 得到渐近公式

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{n}{a\left(k,n\right)}=\frac{9}{20\cdot\ln 10}\ln x+O\left(x\right).$$

于是证明了定理4.10中$k=2$的情况.

现在证明定理4.10 中$k=3$的情况. 考虑到数列$a\left(3,n\right)$的结构, 设n的十进制表示为k位数, 即就是

$$n=b_kb_{k-1}\cdots b_2b_1,$$

其中

$$1\leqslant b_k\leqslant 9, 0\leqslant b_i\leqslant 9, i=1,2,\cdots k-1.$$

于是由乘法的进位法则可知, 当

$$\underbrace{333\cdots34}_{k-1}\leqslant n\leqslant\underbrace{333\cdots33}_{k}$$

时, $3n$为k位数; 当

$$\underbrace{333\cdots34}_{k}\leqslant n\leqslant\underbrace{333\cdots33}_{k+1}$$

时, $3n$为$k+1$位数. 于是当n为k位数时, 由$a\left(3,n\right)$的定义得到

$$a\left(3,n\right)=n\cdot\left(10^k+3\right),$$

或者

$$a\left(3,n\right)=n\cdot\left(10^{k+1}+3\right).$$

对任意充分大的正数x, 显然$\exists M \in N^+$, 使得

$$\underbrace{333\cdots33}_{M} \leqslant x < \underbrace{333\cdots33}_{M+1}, \tag{4-43}$$

于是有恒等式

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\frac{n}{a(3,n)}\\
=&\sum_{n=1}^{3}\frac{n}{a(3,n)}+\sum_{n=4}^{33}\frac{n}{a(3,n)}+\sum_{n=34)}^{333}\frac{n}{a(3,n)}+\sum_{n=334}^{3333}\frac{n}{a(3,n)}+\\
&\cdots\sum_{n=\frac{1}{3}\cdot(10^{M-1}-1)+1}^{\frac{1}{3}\cdot(10^M-1)}\frac{n}{a(3,n)}+\sum_{\frac{1}{3}(10^M-1)+1\leqslant N\leqslant x}\frac{n}{a(3,n)}\\
=&\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{10+3}+\sum_{n=4}^{33}\frac{1}{10^2+3}+\sum_{n=34}^{333}\frac{1}{10^3+3}+\sum_{n=334}^{3333}\frac{1}{10^4+3}+\\
&\cdots+\sum_{n=\frac{1}{3}\cdot(10^{M-1}-1)+1}^{\frac{1}{3}\cdot(10^M-1)}\frac{1}{10^M+3}+\sum_{\frac{1}{3}\cdot(10^M-1)+1\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{10^{M+1}+3}\\
=&\frac{3}{10+3}+\frac{33-3}{10^2+3}+\frac{333-33}{10^3+3}+\frac{3333-333}{10^4+3}+\\
&\cdots+\frac{\frac{1}{3}\cdot(10^M-1)-\frac{1}{3}(10^{M-1}-1)}{10^M+3}+O\left(\frac{x-\frac{1}{3}\cdot(10^M-1)}{10^{M+1}+3}\right)\\
=&\frac{3\cdot1}{10+3}+\frac{3\cdot10}{10^2+3}+\frac{3\cdot10^2}{10^3+3}+\frac{3\cdot10^3}{10^4+3}+\\
&\cdots+\frac{3\cdot10^{M-1}}{10^M+3}+O(1)\\
=&\frac{3\cdot(10+3-3)}{10\cdot(10+3)}+\frac{3\cdot(10^2+3-3)}{10\cdot(10^2+3)}+\frac{3\cdot(10^3+3-3)}{10\cdot(10^3+3)}+\frac{3\cdot(10^4+3-3)}{10\cdot(10^4+3)}+\\
&\cdots+\frac{3\cdot(10^{M+1}+3-3)}{10\cdot(10^M+3)}+O(1)\\
=&\frac{3}{10}M+O\left(\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{10^m}\right)+O(1)\\
=&\frac{3}{10}M+O(1).
\end{aligned}\tag{4-44}$$

注意到式(4-43) 即是

$$\frac{1}{3}\cdot\left(10^M-1\right)\leqslant x<\frac{1}{3}\cdot\left(10^{M+1}-1\right),$$

于是有估计式

$$M=\frac{1}{\ln 10}\ln x+O\left(1\right).$$

所以由式(4-44) 得到渐近公式

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{n}{a\left(3,n\right)}=\frac{3}{10\cdot\ln 10}\ln x+O\left(x\right).$$

于是完成了定理4.10 中$k=3$的证明. 利用同样的方法也可以推出定理4.10 中$k=4,5$的结论. 至于定理4.11 的证明, 和定理4.10 的证明类似, 只是在求和中对n 的分法不同, 这里就不一一举例.

4.7 Smarandache 平方数列

对任意非负整数n, 用$SP(n)$表示n的Smarandache最小平方数, 即就是大于或等于n的最小完全平方数. 例如该数列的前几项为:

$$0,1,4,4,4,9,9,9,9,9,16,16,16,16,16,16,16,25,\cdots.$$

用$IP(n)$表示n的Smarandache最大平方数, 即就是不超过n的最大完全平方数.这个数列的前几项为:

$$0,1,1,1,4,4,4,4,4,9,9,9,9,9,9,9,16,16,16,16,16,16,16,16,16,25,\cdots.$$

令

$$S_n=\frac{(SP(1)+SP(2)+\cdots+SP(n))}{n};$$

$$I_n=\frac{(IP(1)+IP(2)+\cdots+IP(n))}{n};$$

$$K_n=\sqrt[n]{SP(1)+SP(2)+\cdots+SP(n)};$$

$$L_n=\sqrt[n]{IP(1)+IP(2)+\cdots+IP(n)}.$$

在文献[7]中, 美籍罗马尼亚著名数论专家Smarandache教授提出了这两个数列, 并建议人们研究它的各种性质, 有关这些内容和有关背景参阅文献[51, 52, 57].在文献[56]中, 日本Kenichiro Kashihara博士再次对这两个数列产生了兴趣, 同时提出了研究极限$\frac{S_n}{I_n}$、S_n-I_n、$\frac{K_n}{L_n}$ 及K_n-L_n的敛散性问题, 如果收敛, 并求其极限. 在文献[60]中, 苟素首次研究了这几个均值的渐近性问题, 并利用初等及解析方法证明了下面几个结论:

定理 4.12 对任意实数$x>2$, 有渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} SP(n)=\frac{x^2}{2}+O(x^{\frac{3}{2}});$$

$$\sum_{n\leqslant x} IP(n)=\frac{x^2}{2}+O(x^{\frac{3}{2}}).$$

由此定理立刻推出下面的推论:

推论 4.5 对任意正整数n, 有渐近公式

$$\frac{S_n}{I_n}=1+O(n^{-\frac{1}{2}});$$

及极限式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{I_n}=1.$$

推论 4.6 对任意正整数n, 有渐近公式

$$\frac{K_n}{L_n}=1+O(n^{-\frac{1}{2}});$$

及极限式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{K_n}{L_n}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}(K_n-L_n)=0.$$

然而, 关于S_n-I_n的渐近性问题, 至今似乎没有人研究, 至少没有在现有的文献中看到.然而, 作者认为这一问题是有趣的, 其原因在于一方面它的解决可以对文献[56]中的问题作以完整的回答, 画上完满的句号;另一方面还可以刻画出两种数列$SP(n)$及$IP(n)$的本质区别.本书基于文献[60]中的思想并结合同类项的合并以及误差项的精确处理, 研究了S_n-I_n的渐近性问题, 获得了一个较强的渐近公式, 具体地说也就是证明了下面的定理.

定理 4.13 对于任意正整数$n>2$, 有渐近公式

$$S_n-I_n=\frac{4}{3}\sqrt{n}+O(1).$$

这一结果弥补了文献[60]的不足, 同时将文献[56]中对数列S_n及I_n提出的所有问题给予了解决. 当然, 由该定理还可以推出下面的极限:

$$\lim_{n\to\infty}(S_n-I_n)^{\frac{1}{n}}=1;$$

$$\lim\frac{S_n-I_n}{\sqrt{n}}=\frac{4}{3}.$$

下面证明此定理. 利用初等方法及Euler求和公式分别对S_n及I_n进行非常精确的估计, 最终利用两个精确的估计给出定理的证明.对任意正整数$n>2$, 显然存在唯一的正整数M满足:$M^2<n\leqslant(M+1)^2$, 即$M=n^{\frac{1}{2}}+O(1)$.于是有

$$\begin{aligned}
S(n)&=\frac{1}{n}\sum_{k\leqslant n}SP(k)=\frac{1}{n}\sum_{k\leqslant M^2}SP(k)+\frac{1}{n}\sum_{M^2<k\leqslant n}SP(k)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{h\leqslant M}\sum_{(h-1)^2<k\leqslant h^2}SP(k)+\frac{1}{n}\sum_{M^2<k\leqslant n}(M+1)^2\\
&=\frac{1}{n}\sum_{h\leqslant M}(h^2-(h-1)^2)h^2+\frac{1}{n}(n-M^2)(M+1)^2\\
&=\frac{1}{n}\sum_{h\leqslant M}(2h^3-h^2)+\frac{1}{n}(n-M^2)(M+1)^2\\
&=\frac{M^2(M+1)^2}{2n}-\frac{M(M+1)(2M+1)}{6n}+\frac{1}{n}(n-M^2)(M+1)^2\\
&=(M+1)^2-\frac{M(M+1)(2M+1)}{6n}-\frac{M^2(M+1)^2}{2n}.
\end{aligned}\tag{4-45}$$

同理根据$IP(n)$的定义, 也有计算公式

$$\begin{aligned}
I_n&=\frac{1}{n}\sum_{k\leqslant n}IP(k)=\frac{1}{n}\sum_{k<M^2}IP(k)+\frac{1}{n}\sum_{M^2\leqslant k\leqslant n}IP(k)\\
&=\frac{1}{n}\sum_{h\leqslant M}\sum_{(h-1)^2\leqslant k<h^2}IP(k)+\frac{1}{n}\sum_{M^2\leqslant k\leqslant n}M^2\\
&=\frac{1}{n}\sum_{h\leqslant M}(h^2-(h-1)^2)(h-1)^2+\frac{1}{n}(n-M^2+1)M^2\\
&=\frac{1}{n}\sum_{h\leqslant M}(2h^3-5h^2+4h-1)+\frac{1}{n}(n-M^2+1)M^2\\
&=\frac{M^2(M+1)^2}{2n}-\frac{5M(M+1)(2M+1)}{6n}+\frac{2M(M+1)}{n}-\frac{M}{n}+\frac{(n-M^2+1)M^2}{n}\\
&=M^2-\frac{M^2(M^2-2M-3)}{2n}-\frac{5M(M+1)(2M+1)}{6n}+\frac{2M^2+M}{n}.
\end{aligned}\tag{4-46}$$

于是由(4-45)和(4-46)得

$$\begin{aligned}
S_n-I_n&=(M+1)^2-\frac{M(M+1)(2M+1)}{6n}-\frac{M^2(M+1)^2}{2n}-\\
&\quad\left[M^2-\frac{M^2(M^2-2M-3)}{2n}-\frac{5M(M+1)(2M+1)}{6n}+\frac{2M^2+M}{n}\right]\\
&=2M+1-\frac{2M^3+7M}{3n}.
\end{aligned}\tag{4-47}$$

注意到

$$M=n^{\frac{1}{2}}+O(1),$$

由(4-47)式便可推出

$$\begin{aligned} S_n - I_n &= 2M - \frac{2M}{3} + O(1) = \frac{4}{3}M + O(1) \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{n} + O(1). \end{aligned}$$

第五章 其它数论问题

5.1 含有Fibonacci数与Lucas数的恒等式

众所周知, Fibonacci序列$\{F_n\}$ 与Lucas序列$\{L_n\}(n=0,1,2,...)$ 是由二阶线性递归序列

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n,$$

$$L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$$

来定义的, 其中$n\geqslant 0$, $F_0=0$, $F_1=1$, $L_0=2$ 且$L_1=1$. 这两个序列在数学、建筑学、计算机乃至生物学等各个领域都发挥着极其重要的作用. 因此关于F_n 和L_n 的各种各样性质的研究吸引了国内外众多学者的目光. R.L.Duncan[76] 和L.Kuipers[78] 分别在1967年和1969年证明了$\log F_n$ 是模1 一致分布的. Neville Robbins[81] 在1988年研究了形如$px^2\pm 1$, $px^3\pm 1$ (其中p 是素数)的Fibonacci数. 关于Fibonacci数的恒等式这方面内容, 也有不少很漂亮的结果. 例如,

$$\sum_{n=0}^{m}F_n=F_{m+2}-1,$$
$$\sum_{n=0}^{m-1}F_{2n+1}=F_{2m},$$
$$\sum_{n=0}^{m}nF_n=mF_{m+2}-F_{m+3}+2,$$
$$\sum_{n=0}^{m}C_m^nF_{c-n}F_k^nF_{k+1}^{m-n}=F_{mk+c},$$

其中$C_m^n=\frac{m!}{n!(m-n)!}$.

2004年, 张文鹏[84]得到了包含F_n 和L_n 的几个更广泛的恒等式

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n}F_{m(a_1+1)}F_{m(a_2+1)}\ldots F_{m(a_{k+1}+1)}=(-1)^{mn}\frac{F_m^{k+1}}{2^kk!}U_{n+k}^{(k)}\left(\frac{i^m}{2}L_m\right),$$

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}=n+k+1}L_{ma_1}L_{ma_2}\ldots L_{ma_{k+1}}$$

$$= (-1)^{m(n+k+1)}\frac{2}{k!}\sum_{h=0}^{k+1}\left(\frac{i^{m+2}}{2}L_m\right)^h\frac{(k+1)!}{h!(k+1-h)!}U_{n+2k+1-h}^{(k)}\left(\frac{i^m}{2}L_m\right),$$

其中k, m 是任意正整数, $n, a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ 是非负整数且i 是-1 的平方根, $U_k(x)$ 是第二类Chebyshev多项式.

易媛[90]在此基础上又得到了关于Fibonacci多项式的几个恒等式

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n} F_{a_1+1}(x)\cdot F_{a_2+1}(x)\cdots F_{a_k+1}(x) = \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} C_{n+k-1-m}^{m}\cdot C_{n+k-1-2m}^{k-1}\cdot x^{n-2m},$$

其中Fibonacci多项式$F_n(x)$由二阶线性递归公式$F_{n+2}(x) = xF_{n+1}(x) + F_n(x)$定义, 且初值为$F_0(x) = 0$,$F_1(x) = 1$; $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$,$[z]$表示不超过$z$的最大整数; 当$x = 1$时, $F_n(x) = F_n$, 由此得到几个关于Fibonacci数的恒等式,以下几个公式都对任意的正整数k和n成立

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n+k} F_{a_1}\cdot F_{a_2}\cdots F_{a_k} = \sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} C_{n+k-1-m}^{m}\cdot C_{n+k-1-2m}^{k-1},$$

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n+k} F_{2a_1}\cdot F_{2a_2}\cdots F_{2a_k} = 3^k\cdot 5^{\frac{n-k}{2}}\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} C_{n+k-1-m}^{m}\cdot C_{n+k-1-2m}^{k-1}\cdot 5^{-m},$$

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n+k} F_{3a_1}\cdot F_{3a_2}\cdots F_{3a_k} = 2^{2n+k}\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} C_{n+k-1-m}^{m}\cdot C_{n+k-1-2m}^{k-1}\cdot 16^{-m},$$

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n+k} F_{4a_1}\cdot F_{4a_2}\cdots F_{4a_k} = 3^n\cdot 7^k\cdot 5^{\frac{n-k}{2}}\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} C_{n+k-1-m}^{m}\cdot C_{n+k-1-2m}^{k-1}\cdot 45^{-m},$$

$$\sum_{a_1+a_2+\cdots+a_k=n+k} F_{5a_1}\cdot F_{5a_2}\cdots F_{5a_k} = 5^k\cdot 11^n\sum_{m=0}^{[\frac{n}{2}]} C_{n+k-1-m}^{m}\cdot C_{n+k-1-2m}^{k-1}\cdot 121^{-m}.$$

本节主要通过把x^n表示成Chebyshev多项式来得到包含Fibonacci数与Lucas数的四个恒等式. 也就是, 要证明下面的两个定理.

定理 5.1 对任意非负整数n 和正整数m, 有恒等式

$$L_m^{2n} = (-1)^{mn}\frac{(2n)!}{(n!)^2} + (2n)!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{m(n-k)}}{(n-k)!(n+k)!}L_{2km};$$

$$L_m^{2n+1} = (2n+1)!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{m(n-k)}}{(n-k)!(n+k+1)!}L_{(2k+1)m}.$$

定理 5.2 对任意非负整数n 和正整数m, 有恒等式

$$L_m^{2n} = \frac{(2n)!}{F_m} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{m(n-k)}(2k+1)}{(n-k)!(n+k+1)!} F_{(2k+1)m};$$

$$L_m^{2n+1} = \frac{2(2n+1)!}{F_m} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{m(n-k)}(k+1)}{(n-k)!(n+k+2)!} F_{2(k+1)m}.$$

本节将给出在定理证明中需要用到的几个引理. 在给出引理之前首先需要第一类Chebyshev多项式$T_n(x)$ 和第二类Chebyshev多项式$U_n(x)\,(n=0,1,\cdots)$ 的一般表达式

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right],$$
$$U_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}\right].$$

当然它们还可以用如下递归公式来定义:

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x),$$

$$U_{n+2}(x) = 2xU_{n+1}(x) - U_n(x),$$

其中$n \geqslant 0$, $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$, $U_0(x)=1$ 且$U_1(x)=2x$.

下面给出如下几个引理.

引理 5.1 对任何正整数m 和n, 有恒等式

$$T_n(T_m(x)) = T_{mn}(x),$$
$$U_n(T_m(x)) = \frac{U_{m(n+1)-1}(x)}{U_{m-1}(x)}.$$

证明: 参阅文献[84].

引理 5.2 设i 是-1 的平方根, m 和n 是任意正整数, 则有恒等式

$$U_n\left(\frac{i}{2}\right) = i^n F_{n+1},$$
$$T_n\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{i^n}{2} L_n,$$
$$T_n\left(T_m\left(\frac{i}{2}\right)\right) = \frac{i^{mn}}{2} L_{mn},$$
$$U_n\left(T_m\left(\frac{i}{2}\right)\right) = i^{mn}\frac{F_{m(n+1)}}{F_m}.$$

证明: 显然有$U_n\left(\frac{i}{2}\right) = i^n F_{n+1}$, $T_n\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{i^n}{2} L_n$, 则根据引理5.1, 又容易地得到余下的两个公式. 这就证明了引理5.2.

引理 5.3 对任意非负整数n, 设

$$x^n \equiv \frac{1}{2}a_{n\cdot 0}T_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}a_{n\cdot k}T_k(x) \tag{5-1}$$

且

$$x^n \equiv \sum_{k=0}^{\infty}b_{n\cdot k}U_k(x), \tag{5-2}$$

则有

$$a_{n\cdot k}=\begin{cases}\frac{2n!}{(n-k)!!(n+k)!!}, & n\geqslant k, n+k\text{是偶数};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{5-3}$$

$$b_{n\cdot k}=\begin{cases}\frac{2(k+1)n!}{(n-k)!!(n+k+2)!!}, & n\geqslant k, n+k\text{是偶数};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \tag{5-4}$$

证明: 知道, Chebyshev多项式有很多性质(参阅文献[92]). 例如

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \frac{\pi}{2}, & m=n>0,\\ \pi, & m=n=0;\end{cases} \tag{5-5}$$

$$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta; \tag{5-6}$$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}U_m(x)U_n(x)\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \frac{\pi}{2}, & m=n>0,\\ \pi, & m=n=0;\end{cases} \tag{5-7}$$

$$U_n(\cos\theta)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}. \tag{5-8}$$

首先证明(5-3)式. 对任意非负整数m, 首先给(5-1)式两边同时乘以$\frac{T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, 再两边从$-1$ 到1 积分, 最后应用(5-5)式得到

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{x^nT_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx&=\frac{1}{2}a_{n\cdot 0}\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}a_{n\cdot k}\int_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\&=\frac{\pi}{2}a_{n\cdot m},\qquad (m=0,1,2,\cdots)\end{aligned}$$

因此,

$$a_{n\cdot m}=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^nT_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

设$x = \cos t$, 根据(5-6)式有

$$\begin{aligned}
a_{n\cdot m} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^n t \cos mt\, dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^n t\left(\cos(m-1)t\cos t - \sin(m-1)t\sin t\right)\, dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^{n+1} t\, \cos(m-1)t\, dt - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^n t\, \sin(m-1)t\, \sin t\, dt \\
&= a_{n+1\cdot m-1} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n+1}\int_0^{\pi} \sin(m-1)t\, d(\cos^{n+1} t) \\
&= a_{n+1\cdot m-1} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot \cos^{n+1} t\cdot\sin(m-1)t\Big|_0^{\pi} \\
&\quad -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{m-1}{n+1}\int_0^{\pi} \cos^{n+1} t\, \cos(m-1)t\, dt \\
&= a_{n+1\cdot m-1} - \frac{m-1}{n+1}\cdot a_{n+1\cdot m-1} \\
&= \frac{n-m+2}{n+1}\cdot a_{n+1\cdot m-1} \\
&= \frac{n-m+2}{n+1}\cdot\frac{n-m+4}{n+2}\cdot a_{n+2\cdot m-2} \\
&= \cdots \\
&= \frac{n-m+2}{n+1}\cdot\frac{n-m+4}{n+2}\cdots\frac{n-m+2m}{n+m}\cdot a_{n+m\cdot 0} \\
&= \frac{\frac{(n+m)!!}{(n-m)!!}}{\frac{(n+m)!}{n!}}\cdot a_{n+m\cdot 0}.
\end{aligned}$$

下面计算$a_{n+m\cdot 0}$, 显然

$$a_{n+m\cdot 0} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^{n+m} t\, dt.$$

为了简化, 设$I_n = \int_0^{\pi} \cos^n t\, dt$. 当$n$ 为奇数时, 因为$f(x) = \cos x$ 在区间$[0,\pi]$ 上是奇函数, 则

$$I_n = \int_0^{\pi} \cos^n t\, dt = 0; \tag{5-9}$$

当n 为偶数时, 有

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi} \cos^n t\, dt = \int_0^{\pi} \cos^{n-1} t\, d\sin t \\
&= \sin t\cos^{n-1} t\,\Big|_0^{\pi} + (n-1)\int_0^{\pi} \sin^2 t\cdot\cos^{n-2} t\, dt \\
&= (n-1)\int_0^{\pi} \left(1-\cos^2 t\right)\cos^{n-2} t\, dt \\
&= (n-1)\int_0^{\pi} \cos^{n-2} t\, dt - (n-1)\int_0^{\pi} \cos^n t\, dt
\end{aligned}$$

$$=(n-1)I_{n-2}+(n-1)I_n. \tag{5-10}$$

因此得到关于I_n的递推公式

$$I_n=\frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}. \tag{5-11}$$

则由式(5-11)得

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{n-1}{n}\cdot I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot I_{n-4}\\&=\cdots\\&=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot I_0,\end{aligned} \tag{5-12}$$

而由I_n的定义知道

$$I_0=\int_0^\pi\cos^0 t\,dt=\int_0^\pi 1\cdot dt=\pi. \tag{5-13}$$

因此结合式(5-9), (5-12)和(5-13), 得到

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^\pi\cos^n t\,dt\\&=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}\pi, & 当n\ 是偶数,\\ 0, & 当n\ 是奇数.\end{cases}\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}a_{n+m\cdot 0}&=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos^{n+m}t\,dt\\&=\begin{cases}\frac{2(n+m-1)!!}{(n+m)!!}, & 当n+m\ 是偶数,\\ 0, & 当n+m\ 是奇数.\end{cases}\end{aligned}$$

因此

$$a_{n\cdot m}=\begin{cases}\frac{\frac{(n+m)!!}{(n-m)!!}}{\frac{(n+m)!}{n!}}\frac{2(n+m-1)!!}{(n+m)!!}=\frac{2n!}{(n-m)!!(n+m)!!}, & n\geqslant m, n+m\ 是偶数,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

令$m=k$, 立即得到了(5-3)式.

用类似的方法, 来证明(5-4)式. 对任意非负整数m, 首先给(5-2)式两边同乘以$\sqrt{1-x^2}U_m(x)$, 再从-1 到1 积分, 最后利用(5-7)式得到

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}x^nU_m(x)\,dx&=\sum_{k=0}^\infty b_{n\cdot k}\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}U_m(x)U_k(x)\,dx\\&=\frac{\pi}{2}b_{n\cdot m},\qquad (m=0,1,2,\cdots)\end{aligned}$$

令$m=k$, 则有

$$b_{n\cdot k}=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}x^nU_k(x)\,dx.$$

设$x=\cos t$ 根据(5-8)式, 有

$$\begin{aligned}
b_{n\cdot k}&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^n t\cdot\sin(k+1)t\cdot\sin t\,dt\\
&=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{-1}{n+1}\int_0^{\pi}\sin(k+1)t\;d(\cos^{n+1}t)\\
&=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{-1}{n+1}\left(\cos^{n+1}t\cdot\sin(k+1)t\Big|_0^{\pi}-(k+1)\int_0^{\pi}\cos^{n+1}t\cdot\cos(k+1)t\,dt\right)\\
&=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{k+1}{n+1}\int_0^{\pi}\cos^{n+1}t\cdot\cos(k+1)t\,dt\\
&=\frac{k+1}{n+1}\cdot a_{n+1\cdot k+1}.
\end{aligned}$$

利用(5-3)式, 有

$$b_{n\cdot k}=\begin{cases}\frac{2(k+1)n!}{(n-k)!!(n+k+2)!!}, & n\geqslant k, n+k \text{ 是偶数;}\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}$$

因此得到了(5-4)式. 这就证明了引理2.3.

引理 5.4 对任意非负整数n, 把x^n 表示成如下的形式

$$\begin{aligned}
x^{2n}&=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}T_0(x)+\frac{2(2n)!}{4^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-k)!(n+k)!}T_{2k}(x)\\
&=\frac{(2n)!}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{(n-k)!(n+k+1)!}U_{2k}(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^{2n+1}&=\frac{(2n+1)!}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!(n+k+1)!}T_{2k+1}(x)\\
&=\frac{(2n+1)!}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{(n-k)!(n+k+2)!}U_{2k+1}(x).
\end{aligned}$$

证明: 在引理5.3的式(5-3)和式(5-4)中, 当$a_{nk}\neq 0$ 时, $n+k$ 必为偶数, 即n 与k 具有相同的奇偶性, 利用这一点, 将证明引理5.4.

首先证明第一个等式, 根据式(5-1)及(5-3), 有

$$\begin{aligned}
x^{2n}&=\frac{1}{2}a_{2n\cdot 0}T_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2n\cdot k}T_k(x)\\
&=\frac{1}{2}a_{2n\cdot 0}T_0(x)+\sum_{k=1}^{n}a_{2n\cdot 2k}T_{2k}(x)
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(2n)!}{(2n)!!(2n)!!}T_0(x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{2(2n)!}{(2n-2k)!!(2n+2k)!!}\cdot T_{2k}(x)$$
$$=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}T_0(x)+\frac{2(2n)!}{4^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-k)!(n+k)!}\cdot T_{2k}(x),$$

另一方面, 由式(5-2)和式(5-4)得

$$\begin{aligned}x^{2n}&=\sum_{k=0}^{\infty}b_{2n\cdot k}U_k(x)\\&=\sum_{k=0}^{n}b_{2n\cdot 2k}U_{2k}(x)\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{2(2k+1)(2n)!}{(2n-2k)!!(2n+2k+2)!!}\cdot U_{2k}(x)\\&=\frac{(2n)!}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{(n-k)!(n+k+1)!}\cdot U_{2k}(x).\end{aligned}$$

对于第二个等式, 因为$2n+1$ 是奇数, 所以$a_{2n+1\cdot 0}=0$, 因此由引理5.3中式(5-1)和式(5-3), 有

$$\begin{aligned}x^{2n+1}&=\sum_{k=1}^{\infty}a_{2n+1\cdot k}T_k(x)\\&=\sum_{k=0}^{n}a_{2n+1\cdot 2k+1}T_{2k+1}(x)\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{2(2n+1)!}{(2n-2k)!!(2n+2k+2)!!}\cdot T_{2k+1}(x)\\&=\frac{(2n+1)!}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!(n+k+1)!}\cdot T_{2k+1}(x),\end{aligned}$$

另一方面, 由式(5-2)和式(5-4)得

$$\begin{aligned}x^{2n+1}&=\sum_{k=0}^{\infty}b_{2n+1\cdot k}U_k(x)\\&=\sum_{k=0}^{n}b_{2n+1\cdot 2k+1}U_{2k+1}(x)\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{2(2k+2)(2n+1)!}{(2n-2k)!!(2n+2k+4)!!}\cdot U_{2k+1}(x)\\&=\frac{(2n+1)!}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{(n-k)!(n+k+2)!}\cdot U_{2k}(x).\end{aligned}$$

这就证明了引理5.4.

现在来给出第一节两个定理的证明.

定理5.1的证明: 根据引理5.4, 令$x=T_m(x)$, 则有

$$T_m^{2n}(x)=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}T_0(T_m(x))+\frac{2(2n)!}{4^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-k)!(n+k)!}T_{2k}(T_m(x)),$$

$$T_m^{2n+1}(x)=\frac{(2n+1)!}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!(n+k+1)!}T_{2k+1}(T_m(x)),$$

再令$x=\frac{i}{2}$ 并代入上式, 根据引理5.2 可以得到

$$\frac{i^{2mn}}{2^{2n}}L_m^{2n}=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}+\frac{2(2n)!}{4^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n-k)!(n+k)!}\frac{i^{2mk}}{2}L_{2mk},$$

$$\frac{i^{(2n+1)m}}{2^{2n+1}}L_m^{2n+1}=\frac{(2n+1)!}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!(n+k+1)!}\frac{i^{(2k+1)m}}{2}L_{m(2k+1)}.$$

即

$$L_m^{2n}=(-1)^{mn}\frac{(2n)!}{(n!)^2}+(2n)!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{m(k-n)}}{(n-k)!(n+k)!}L_{2km},$$

$$L_m^{2n+1}=(2n+1)!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{m(k-n)}}{(n-k)!(n+k+1)!}L_{m(2k+1)}.$$

这就完成了定理5.1的证明.

定理5.2的证明: 利用引理5.4, 有

$$T_m^{2n}(x)=\frac{(2n)!}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{(n-k)!(n+k+1)!}U_{2k}(T_m(x)),$$

$$T_m^{2n+1}(x)=\frac{(2n+1)!}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{(n-k)!(n+k+2)!}U_{2k+1}(T_m(x)),$$

并且令$x=\frac{i}{2}$, 根据引理5.2 有

$$\frac{i^{2mn}}{2^{2n}}L_m^{2n}=\frac{(2n)!}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{(n-k)!(n+k+1)!}i^{2mk}\frac{F_{m(2k+1)}}{F_m},$$

$$\frac{i^{m(2n+1)}}{2^{2n+1}}L_m^{2n+1}=\frac{(2n+1)!}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k+1}{(n-k)!(n+k+2)!}i^{(2k+1)m}\frac{F_{m(2k+2)}}{F_m}.$$

化简得到

$$L_m^{2n}=(2n)!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{m(k-n)}(2k+1)}{(n-k)!(n+k+1)!}\frac{F_{m(2k+1)}}{F_m},$$

$$L_m^{2n+1}=2(2n+1)!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{m(k-n)}(k+1)}{(n-k)!(n+k+2)!}\frac{F_{2m(k+1)}}{F_m}.$$

这就证明了定理5.2.

5.2 Dirichlet L-函数与三角和

对各种三角和的估计是解析数论中最重要的研究课题之一. 设p 是素数, $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ 是一个整数系数的k次多项式, 且满足$(p, a_0, a_1, \ldots, a_k) = 1$. 早在1932年, L. J. Mordell[93]研究了如下所述的素变数三角和并得到了著名的定理

$$\sum_{x=1}^{p-1} e\left(\frac{f(x)}{p}\right) \ll p^{1-\frac{1}{k}},$$

其中$e(y) = e^{2\pi iy}$.

在十年后华罗庚[94,95,101]和闵嗣鹤[102]将这一问题扩展到了两个变量, 即

$$\sum_{x=1}^{p-1}\sum_{y=1}^{p-1} e\left(\frac{f(x,y)}{p}\right) \ll p^{2-\frac{2}{k}},$$

其中$f(x, y)$ 是关于两个变量x 和y 的k次多项式, 但是遗憾的是, 这一结果不能和单变量三角和互相转换.

之后, L. Carlitz 和S. Uchiyama[103]又改进了文献[93]的结果

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1} e\left(\frac{f(x)}{p}\right)\right| \leqslant k\sqrt{p},$$

其中$k \geqslant 2$.

本节中, 定义如下带特征的三角和

$$\sum_{a=1}^{q} \chi(a) e\left(\frac{f(a)}{q}\right),$$

其中χ 是一个模q 的Dirichlet特征, 且$q \nmid (a_0, a_1, \ldots, a_k)$.

当$f(a) = na$时, 该三角和变成了Gauss和

$$G(n, \chi) = \sum_{a=1}^{q} \chi(a) e\left(\frac{an}{q}\right).$$

特别地, 当$n = 1$, 记

$$\tau(\chi) = \sum_{a=1}^{q} \chi(a) e\left(\frac{a}{q}\right).$$

当$\chi = \chi_0$时, 记

$$C_q(n) = \sum_{a=1}^{q}{}' e\left(\frac{na}{q}\right),$$

称为Ramanujan和, 其中$\sum_{a=1}^{q}{}'$表示对所有与q互素的a 求和. 这是上面所讨论的三角和的特殊情况(若$q=p$ 是素数且$f(a)=na$), 当然它的性质也了解了很多.

关于Gauss和的性质, 显然有

$$\begin{aligned}
&G(n_1,\chi)=G(n_2,\chi), \qquad n_1\equiv n_2(\mathrm{mod} q),\\
&G(-n,\chi)=\chi(-1)G(n,\chi), \quad G(n,\bar{\chi})=\chi(-1)G(n,\bar{\chi}),\\
&G(n,\chi)=\bar{\chi}(n)\tau(\chi), \qquad (n,q)=1,\\
&C_q(n)=C_q(1)=\tau(\chi_0), \quad (n,q)=1,
\end{aligned}$$

此时, χ 是模q的特征, χ_0 是主特征, 且q,n 是正整数.

另外, 若χ, χ_1 和χ_2 分别为模q, q_1 和q_2的特征, 且满足条件

$$q=q_1q_2,\ (q_1,q_2)=1,\ \chi=\chi_1\chi_2,$$

则Gauss和可以分解为下式

$$G(n,\chi)=\chi_1(q_2)\chi_2(q_1)G(n,\chi_1)G(n,\chi_2).$$

若χ为模q的非原特征(关于原特征的定义可参阅文献[6, 106,]), 且$\chi(n)$(模q)是由原特征χ^*(模q^*)导出的, 设q_1是和q^* 有相同素因子(不计重数)的q的最大除数, 则对$(n.q)>1$, 当$q^*\neq\frac{q_1}{(n,q_1)}$时, 有$G(n,\chi)=0$; 当$q^*=\frac{q_1}{(n,q_1)}$时, 有

$$G(n,\chi)=\bar{\chi}^*\left(\frac{n}{(n,q)}\right)\chi^*\left(\frac{q}{q^*(n,q)}\right)\mu\left(\frac{q}{q^*(n,q)}\right)\phi(q)\phi^{-1}\left(\frac{q}{(n,q)}\right)\tau(\chi^*),$$

其中, $\mu(n)$ 是Möbius函数, $\phi(q)$ 是Euler函数.

关于$\tau(\chi)$ 的最重要的性质之一就是若χ 是一个模q(q 为任意正整数) 的原特征, 则$|\tau(\chi)|=\sqrt{q}$, 但对任意的χ 模q, 也有如下不等式(参阅文献[6] 和[106])

$$|\tau(\chi)|\leqslant\sqrt{q}.$$

另外, $\tau(\chi)$也有一个分解式. 若$\chi_q\Leftrightarrow\chi^*_{q^*}$, 有

$$\tau(\chi)=\chi^*\left(\frac{q}{q^*}\right)\mu\left(\frac{q}{q^*}\right)\tau(\chi^*).$$

但是, 当χ 是一个一般的Dirichlet特征, 而$f(a)$ 也是一个一般的k次多项式时,

$$\sum_{a=1}^{p}\chi(a)e\left(\frac{f(a)}{p}\right)$$

的值的变化是极其不规律的. 但还有许多学者对它作了一定的研究.

对整数$q\geqslant 3$, k 为多项式$f(x)$ 的次数, $\phi(q)$为Euler函数, χ 是模q的Dirichlet 特征,

若$(k,q\phi(q))=1$, 徐哲峰[108] 给出了这种带特征的完整三角和的一个等式

$$\sum_{m=1}^{q}\sum_{\chi \bmod q}\left|\sum_{a=1}^{q}\chi(a)e\left(\frac{f(a)}{q}\right)\right|^4=\phi^2(q)q^2\prod_{p^\alpha\|q}\left(\alpha+1-\frac{\alpha+2}{p}\right),$$

其中$\prod_{p^\alpha\|q}$ 表示对所有满足$p^\alpha|q$ 且$p^{\alpha+1}\nmid q$ 的p 求积.

当q, m, n 及k 是整数且满足$q,k\geqslant 1,(q,k)=1$时, 刘华宁[109]研究了如下形式的混合指数和

$$C(m,n,k,\chi;q)=\sum_{a=1}^{q}\chi(a)e\left(\frac{ma^k+na}{q}\right),$$

得到了下面的等式

$$\sum_{\chi \bmod q}\sum_{m=1}^{q}|C(m,n,k,\chi;q)|^4=q^2\phi^2(q)\prod_{\substack{p^\alpha\|q\\ \alpha\geqslant 2}}\left(\alpha+1-\frac{\alpha+1+2(k,p-1)}{p}\right)\cdot$$
$$\cdot\prod_{p\|q}\left(2-\frac{2((k,p-1)+1)}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{(k,p-1)^2}{p(p-1)}\right),$$

其中$\prod_{p^\alpha\|q}$定义同上.

而刘建亚、吕世广和展涛[110]更是将如下形式的素变数三角和推广到在小区间上并给出了估计式

$$\sum_{x<m\leqslant x+y}\Lambda(m)e(m^k\alpha)\ll(qx)^\epsilon\left(\frac{q^{\frac12}y\lambda^{\frac12}}{x^{\frac12}}+q^{\frac12}x^{\frac12}\lambda^{\frac16}+y^{\frac12}x^{\frac{3}{10}}+\frac{x^{\frac54}}{\lambda^{\frac16}}+\frac{x}{q^{\frac12}\lambda^{\frac12}}\right),$$

其中, $\Lambda(n)$ 是von Mangoldt函数, $k\geqslant 1$ 是整数, x, y 都为实数且$2\leqslant x\leqslant y$, $\alpha=\frac{a}{q}+d$,$1\leqslant a\leqslant q$, $(a,q)=1$, $\lambda=|d|x^k+x^2y^{-2}$. 其它关于三角和的内容请参阅文献[111-119].

而本节是将三角和

$$\sum_{a=1}^{p}\chi(a)e\left(\frac{f(a)}{p}\right),$$

与Dirichlet L-函数进行加权, 给出他们的加权均值的渐近公式. 关于Dirichelet L-函数的加权均值, 国内外众多学者都对它进行了研究(参阅文献[120-127]).

在2002年易媛和张文鹏[128]就给出了Dirichlet L-函数和$\tau(\chi)$ 加权均值的渐近公式.

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|\tau(\chi)|^m|L(1,\chi)|^{2k}$$
$$=N^{\frac{m}{2}-1}\phi^2(N)\zeta^{2k-1}(2)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{2k-1}\prod_{p\nmid q}\left(1-\frac{1-C_{2k-2}^{k-1}}{p^2}\right)\prod_{p|M}\left(p^{\frac{m}{2}+1}-2p^{\frac{m}{2}}+1\right)$$
$$+O\left(q^{\frac{m}{2}+\epsilon}\right),$$

其中$q \geqslant 3$ 为整数且满足$q = MN, (M, N) = 1, M = \prod\limits_{p\|q} p$ ($\prod_{p\|q}$ 表示对所有满足$p|q$ 且$p^2 \nmid q$ 的p 求积), $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$.

于是, 本节把这样一个广义三角和与Dirichlet L-函数结合在一起, 研究它们加权均值的渐近性质

$$\sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a) e\left(\frac{f(a)}{p}\right) \right|^2 |L(1, \chi)|^{2m},$$

得出了一个更一般的结论. 这使能够更加清楚地知道这样一个广义三角和与Dirichlet L-函数之间的某种联系. 更准确地说, 将证明下面的定理:

定理 5.3 设$p \geqslant 3$ 是素数且χ是模p 的Dirichlet特征. 再设$f(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i$是一个整数系数的$k$次多项式且满足$p \nmid (a_0, a_1, \ldots, a_k)$. 则对任意正整数$m$ 和k, 有如下渐近公式

$$\begin{aligned}
&\sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a) e\left(\frac{f(a)}{p}\right) \right|^2 |L(1, \chi)|^{2m} \\
=& p^2 \zeta^{2m-1}(2) \prod_{p_0} \left(1 - \frac{1 - C_{2m-2}^{m-1}}{p_0^2}\right) + O\left(p^{2-\frac{1}{k}+\epsilon}\right),
\end{aligned}$$

其中$\prod_{p_0}$ 表示对所有不同于p 的素数求积, $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$, 且大$O$常数仅依赖于正整数$k$ 和任一给定的实数ϵ.

若令$f(a) = a$, 有Dirichlet L-函数与$\tau(\chi)$加权均值的渐近公式, 这其实就是文献[128] 的一个特殊情况. 把它写成如下推论:

推论 5.1 设$p \geqslant 3$ 是一个素数且χ 是模p的Dirichlet 特征, 则对任意的正整数m, 有如下渐近公式

$$\begin{aligned}
&\sum_{\chi \neq \chi_0} |\tau(\chi)|^2 |L(1, \chi)|^{2m} \\
=& p^2 \zeta^{2m-1}(2) \prod_{p_0} \left(1 - \frac{1 - C_{2m-2}^{m-1}}{p_0^2}\right) + O(p^{1+\epsilon}).
\end{aligned}$$

一般地, 对于$q \geqslant 3$ 是整数, 用目前所掌握的方法无法得到, 但是相信

$$\sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{a=1}^{q} \chi(a) e\left(\frac{f(a)}{q}\right) \right|^2 |L(1, \chi)|^{2m},$$

的渐近公式是存在的, 因此这仍是一个开放性问题.

为了完成定理的证明, 需要下面几个引理. 首先给出带有多项式的三角和的一个恒等式.

引理 5.5 设$f(x)$ 是整数系数的k次多项式, 记为$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k$, 并且$\chi$ 是模$p(p\geqslant 3$ 是素数) 的Dirichlet特征. 则有

$$\left|\sum_{a=1}^{p-1}\chi(a)e\left(\frac{f(a)}{p}\right)\right|^2=p-1+\sum_{a=2}^{p-1}\chi(a)\sum_{b=1}^{p-1}e\left(\frac{g(b,a)}{b}\right),$$

其中$g(b,a)=f(ab)-f(b)=\sum_{i=0}^{k}a_i(a^i-1)b^i$.

证明: 注意到$1\leqslant b\leqslant p-1$, 则有$(b,p)=1$. 根据特征的正交性, 可以得到

$$\begin{aligned}\left|\sum_{a=1}^{p-1}\chi(a)e\left(\frac{f(a)}{p}\right)\right|^2&=\sum_{a,\,b=1}^{p-1}\chi(a)\bar{\chi}(b)e\left(\frac{f(a)-f(b)}{p}\right)\\&=\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{b=1}^{p-1}\chi(ab)\bar{\chi}(b)e\left(\frac{f(ab)-f(b)}{p}\right).\end{aligned}$$

令

$$g(b,a)=f(ab)-f(b)=\sum_{i=0}^{k}a_i(a^i-1)b^i,$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\sum_{a=1}^{p-1}\chi(a)e\left(\frac{f(a)}{p}\right)\right|^2&=\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{b=1}^{p-1}\chi(a)e\left(\frac{g(b,a)}{p}\right)\\&=\sum_{b=1}^{p-1}\chi(1)e\left(\frac{g(b,1)}{p}\right)+\sum_{a=2}^{p-1}\sum_{b=1}^{p-1}\chi(a)e\left(\frac{g(b,a)}{p}\right)\\&=p-1+\sum_{a=2}^{p-1}\chi(a)\sum_{b=1}^{p-1}e\left(\frac{g(b,a)}{b}\right).\end{aligned}$$

这就证明了引理5.5.

引理 5.6 设$f(x)$ 仍然满足引理5.5的条件, 再令$g(x)=g(x,a)=f(ax)-f(x)=\sum_{i=0}^{k}a_i(a^i-1)x^i$, 则有如下估计式

$$\left|\sum_{b=1}^{p-1}e\left(\frac{g(b,a)}{p}\right)\right|\ \begin{cases}\ll p^{1-\frac{1}{k}}, p\nmid(b_0,b_1,\ldots,b_k)\\=p-1, p|(b_0,b_1,\ldots,b_k)\end{cases}$$

其中$b_i=a_i(a^i-1), i=0,1,\ldots,k$ 且k 是多项式$f(x)$的次数.

证明: 显然当$p\,|(b_0,b_1,\ldots,b_k)$时结论成立. 当$p\nmid(b_0,b_1,\ldots,b_k)$时, 根据$g(x,a)$ 的定义, 有(参阅文献[93, 103])

$$\left|\sum_{b=1}^{p-1}e\left(\frac{g(b,a)}{p}\right)\right|\ll p^{1-\frac{1}{k}}.$$

这就证明了引理5.6.

引理 5.7 设p 是素数, $p \geqslant 3$ 且$d_m(n)$ 记为把n表示成m个因子的表法个数, 即$d_m(n)$是m 次因子函数. 则对任意复变量s, $\mathrm{Re}(s)>1$, 有

$$\sum_{\substack{n=1\\(n,\,p)=1}}^{\infty}\frac{d_m^2(n)}{n^s}=\zeta^{2m-1}(s)\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{2m-1}\prod_{p_0}A(m,p_0,s),$$

其中$\zeta(s)$ 是Riemann zeta-函数并且$\prod_{p_0}$ 表示对所有不同于p的素数求积, $A(m,p,s)=\sum_{i=0}^{2m-2}\frac{1}{p^{is}}\sum_{j=0}^{i}(-1)^jC_{2m-1}^{j}\left(C_{m+i-j-1}^{i-j}\right)^2$, $C_m^n=\frac{m!}{n!(m-n)!}$.

证明: 参阅文献[129]中的引理2.3, 且令$q=p$ 取素数.

引理 5.8 设p 是素数$p \geqslant 3$ 且χ 是模p 的Dirichlet特征. 记$A(y,\chi)=A(y,\chi,m)=\sum_{N\leqslant n\leqslant y}\chi(n)d_m(n)$, 则有如下估计

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|A(y,\chi)|^2\ll y^{2-\frac{4}{2^m}+\epsilon}p^2,$$

其中ϵ 是任意固定的正数.

证明: 参阅文献[127]中的引理4, 并取q为素数.

引理 5.9 设$p\geqslant 3$ 是素数且χ 是模p 的Dirichlet特征. 则对任意$1<a<p$ 和任意正整数m, 有如下渐近公式

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)|L(1,\chi)|^{2m}=\frac{p\,d_m(a)}{a}\zeta^{2m-1}(2)\prod_{p_0}A(m,p_0,s)+O(p^{\epsilon}),$$

其中ϵ 是任意固定的正数, $\prod_{p_0}$ 表示对所有不同于p 的素数求积, $A(m,p,s)=\sum_{i=0}^{2m-2}\frac{1}{p^{is}}\sum_{j=0}^{i}(-1)^jC_{2m-1}^{j}\left(C_{m+i-j-1}^{i-j}\right)^2$, $C_m^n=\frac{m!}{n!(m-n)!}$.

证明: 为了方便起见, 令

$$A(\chi,y)=\sum_{\frac{p}{a}\leqslant n\leqslant y}\chi(n)d_m(n),\quad B(\chi,y)=\sum_{p\leqslant n\leqslant y}\chi(n)d_m(n).$$

则对$Re(s)>1$, Dirichlet 函数$L(s,\chi)$ 绝对收敛, 因此利用Abel恒等式有

$$\begin{aligned}L^m(s,\chi)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)d_m(n)}{n^s}\\&=\sum_{n=1}^{\frac{p}{a}}\frac{\chi(n)d_m(n)}{n^s}+s\int_{\frac{p}{a}}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^{s+1}}dy\\&=\sum_{n=1}^{p}\frac{\chi(n)d_m(n)}{n^s}+s\int_{p}^{+\infty}\frac{B(\chi,y)}{y^{s+1}}dy.\end{aligned}$$

显然上式对$s=1$ 也成立(此时$\chi\neq\chi_0$). 因此根据Dirichlet L-函数的定义, 对任意正整数$a\neq 1$ 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)|L(1,\chi)|^{2m}\\
=&\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)d_m(n)}{n}\right|^2\\
=&\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)d_m(n)}{n}\right)\left(\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\bar\chi(l)d_m(l)}{l}\right)\\
=&\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant\frac{p}{a}}\frac{\chi(n)d_m(n)}{n}+\int_{\frac{p}{a}}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}dy\right)\left(\sum_{l=1}^{p}\frac{\bar\chi(l)d_m(l)}{l}+\int_{p}^{+\infty}\frac{B(\bar\chi,y)}{y^2}dy\right)\\
=&\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)\left(\sum_{n=1}^{\frac{p}{a}}\frac{\chi(n)d_m(n)}{n}\right)\left(\sum_{l=1}^{p}\frac{\bar\chi(l)d_m(l)}{l}\right)\\
&+\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)\left(\sum_{n=1}^{\frac{p}{a}}\frac{\chi(n)d_m(n)}{n}\right)\left(\int_{p}^{+\infty}\frac{B(\bar\chi,y)}{y^2}dy\right)\\
&+\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)\left(\sum_{l=1}^{p}\frac{\bar\chi(l)d_m(l)}{l}\right)\left(\int_{\frac{p}{a}}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}dy\right)\\
&+\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)\left(\int_{\frac{p}{a}}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}dy\right)\left(\int_{p}^{+\infty}\frac{B(\bar\chi,y)}{y^2}dy\right)\\
\equiv& M_1+M_2+M_3+M_4.
\end{aligned}$$

现在来分别估计上式最后一个等式中的每一项.

(i)利用模p 的特征的正交关系, 知道当$(p,l)=1$ 时, 有恒等式

$$\sum_{\chi \bmod p}\chi(n)\bar\chi(l)=\begin{cases}\phi(p), 若 n\equiv l \bmod p\ ;\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

则根据引理5.7, 很容易得到

$$\begin{aligned}
M_1=&\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)\left(\sum_{n=1}^{\frac{p}{a}}\frac{\chi(n)d_m(n)}{n}\right)\left(\sum_{l=1}^{p}\frac{\bar\chi(l)d_m(l)}{l}\right)\\
=&\sum_{\chi \bmod p}\ \sum_{n=1}^{\frac{p}{a}}\sum_{l=1}^{p}\frac{\chi(an)\bar\chi(l)d_m(n)d_m(l)}{nl}-\sum_{n=1}^{\frac{p}{a}}\sum_{l=1}^{p}\frac{d_m(n)d_m(l)}{nl}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \phi(p) \sideset{}{'}\sum_{\substack{n=1 \\ an \equiv l (\bmod p)}}^{\frac{p}{a}} \sideset{}{'}\sum_{l=1}^{p} \frac{d_m(n) d_m(l)}{nl} + O(p^{\epsilon}) \\
&= \phi(p) \sideset{}{'}\sum_{n=1}^{\frac{p}{a}} \frac{d_m^2(n) d_m(a)}{an^2} + O(p^{\epsilon}) \\
&= \frac{d_m(a)\phi(p)}{a} \sideset{}{'}\sum_{n=1}^{\frac{p}{a}} \frac{d_m^2(n)}{n^2} + O(p^{\epsilon}) \\
&= \frac{d_m(a)\phi(p)}{a} \left(\sideset{}{'}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_m^2(n)}{n^2} - \sideset{}{'}\sum_{n=\frac{p}{a}}^{\infty} \frac{d_m^2(n)}{n^2} \right) + O(p^{\epsilon}) \\
&= \frac{d_m(a)\phi(p)}{a} \sideset{}{'}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_m^2(n)}{n^2} + O\left(\frac{d_m(a)\phi(p)}{a} \sideset{}{'}\sum_{n=\frac{p}{a}}^{\infty} \frac{d_m^2(n)}{n^2} + p^{\epsilon} \right) \\
&= \frac{p\, d_m(a)}{a} \zeta^{2m-1}(s) \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{2m-1} \prod_{p_0 \neq p} A(m, p_0, s) + O(p^{\epsilon}). \\
&= \frac{p\, d_m(a)}{a} \zeta^{2m-1}(2) \prod_{p_0} A(m, p_0, s) + O(p^{\epsilon}),
\end{aligned}
$$

其中符号$\sum'_n$ 表示对所有与p互素的n求和, $\prod_{p_0}$ 表示对所有不同于p 的素数求积, 在上式中用到了m次除数函数的简单估计, 即$d_m(n) \ll n^{\epsilon}$.

(ii)根据引理5.7和特征的性质, 有

$$
\begin{aligned}
M_2 &= \sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(a) \left(\sum_{n=1}^{\frac{p}{a}} \frac{\chi(n) d_m(n)}{n} \right) \left(\int_p^{+\infty} \frac{B(\bar{\chi}, y)}{y^2} dy \right) \\
&= \sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(a) \left(\sum_{n=1}^{\frac{p}{a}} \frac{\chi(n) d_m(n)}{n} \right) \left(\int_p^{p^{3(2^{m-2})}} \frac{\sum_{p \leqslant n \leqslant y} \bar{\chi}(n) d_m(n)}{y^2} dy \right) \\
&\quad + \sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(a) \left(\sum_{n=1}^{\frac{p}{a}} \frac{\chi(n) d_m(n)}{n} \right) \left(\int_{p^{3(2^{m-2})}}^{+\infty} \frac{\sum_{p \leqslant n \leqslant y} \bar{\chi}(n) d_m(n)}{y^2} dy \right) \\
&\ll \int_p^{p^{3(2^{m-2})}} \frac{1}{y^2} \left| \sum_{n=1}^{\frac{p}{a}} \sum_{l=p}^{y} \frac{d_m(n) d_m(l)}{n} \sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(an) \bar{\chi}(l) \right| dy \\
&\quad + p^{\epsilon} \int_{p^{3(2^{m-2})}}^{+\infty} \frac{1}{y^2} \sum_{\chi \neq \chi_0} |B(\bar{\chi}, y)| dy.
\end{aligned}
$$

利用Cauchy不等式和引理5.8 容易得到

$$
\sum_{\chi \neq \chi_0} |B(\bar{\chi}, y)| \leqslant \phi^{\frac{1}{2}}(p) \left(\sum_{\chi \neq \chi_0} |B(\bar{\chi}, y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}
$$

$$\leqslant p^{\frac{1}{2}}\left(y^{2-\frac{4}{2^m}+\epsilon}p^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant p^{\frac{3}{2}}y^{1-\frac{2}{2^m}+\epsilon}. \tag{5-14}$$

因此, 有

$$\begin{aligned}
M_2 \ll & \int_p^{p^{3(2^{m-2})}} \frac{\phi(p)}{y^2}\left|\sideset{}{'}\sum_{\substack{n=1\\ an\equiv l(p)}}^{\frac{p}{a}}\sideset{}{'}\sum_{l=p}^{y}\frac{d_m(n)d_m(l)}{n}\right| dy + \\
& + p^{\frac{3}{2}+\epsilon}\int_{p^{3(2^{m-2})}}^{+\infty} y^{-1-\frac{2}{2^m}+\epsilon}\, dy \\
\ll & \int_p^{p^{3(2^{m-2})}} \frac{\phi(p)}{y^2}\sideset{}{'}\sum_{n=1}^{\frac{p}{a}} y^{\epsilon}\frac{1}{n}\frac{y}{p}\left(\frac{p}{a}\right)^{\epsilon} dy + p^{\epsilon} \\
\ll & p^{\epsilon},
\end{aligned}$$

这里用到了估计$d_m(n) \ll n^{\epsilon}$.

(iii)类似地, 也可以得到

$$M_3 = \sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)\left(\sum_{l=1}^{p}\frac{\bar{\chi}(l)d_m(l)}{l}\right)\left(\int_{\frac{p}{a}}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}dy\right) = O(p^{\epsilon}).$$

(iv)对于M_4, 有

$$\begin{aligned}
M_4 = & \sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)\left(\int_{\frac{p}{a}}^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}dy\right)\left(\int_p^{+\infty}\frac{B(\bar{\chi},z)}{z^2}dz\right) \\
= & \sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)\left(\left(\int_{\frac{p}{a}}^{p^{2^{m-1}}} + \int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty}\right)\frac{A(\chi,y)}{y^2}dy\right)\left(\left(\int_p^{p^{2^{m-1}}} + \int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty}\right)\frac{B(\bar{\chi},z)}{z^2}dz\right) \\
= & \sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)\left(\int_{\frac{p}{a}}^{p^{2^{m-1}}}\frac{A(\chi,y)}{y^2}dy\right)\left(\int_p^{p^{2^{m-1}}}\frac{B(\bar{\chi},z)}{z^2}dz\right) + \\
& + \sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)\left(\int_{\frac{p}{a}}^{p^{2^{m-1}}}\frac{A(\chi,y)}{y^2}dy\right)\left(\int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty}\frac{B(\bar{\chi},z)}{z^2}dz\right) + \\
& + \sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)\left(\int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}dy\right)\left(\int_p^{p^{2^{m-1}}}\frac{B(\bar{\chi},z)}{z^2}dz\right) + \\
& + \sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)\left(\int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}dy\right)\left(\int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty}\frac{B(\bar{\chi},z)}{z^2}dz\right) \\
\equiv & N_1 + N_2 + N_3 + N_4.
\end{aligned}$$

对于N_1, 由$A(\chi,y)$和$B(\bar{\chi},z)$的定义以及特征和的正交性, 有

$$N_1 = \sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)\left(\int_{\frac{p}{a}}^{p^{2^{m-1}}}\frac{A(\chi,y)}{y^2}dy\right)\left(\int_p^{p^{2^{m-1}}}\frac{B(\bar{\chi},z)}{z^2}dz\right)$$

$$= \int_{\frac{p}{a}}^{p^{2^{m-1}}} \int_{p}^{p^{2^{m-1}}} \frac{1}{y^2 z^2} \sum_{\frac{p}{a} \leqslant n \leqslant y} \sum_{p \leqslant l \leqslant z} d_m(n) d_m(l) \left(\sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(an) \bar{\chi}(l) \right) dydz$$

$$\leqslant p \int_{\frac{p}{a}}^{p^{2^{m-1}}} \int_{p}^{p^{2^{m-1}}} \frac{1}{y^2 z^2} \sideset{}{'}\sum_{\frac{p}{a} \leqslant n \leqslant y} \sideset{}{'}\sum_{\substack{p \leqslant l \leqslant z \\ an \equiv l (\bmod p)}} d_m(n) d_m(l) dydz$$

$$\ll \int_{\frac{p}{a}}^{p^{2^{m-1}}} \int_{p}^{p^{2^{m-1}}} \frac{1}{y^2 z^{1-\epsilon}} \sum_{\frac{p}{a} \leqslant n \leqslant y} d_m(n) dydz$$

$$\ll \int_{\frac{p}{a}}^{p^{2^{m-1}}} \int_{p}^{p^{2^{m-1}}} y^{-1+\epsilon} z^{-1+\epsilon} dydz$$

$$\ll p^{\epsilon}.$$

对于N_2, 根据特征和的正交性质, 式(5-14)以及估计式$d_m(n) \ll n^{\epsilon}$, 可以得到

$$N_2 = \sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(a) \left(\int_{\frac{p}{a}}^{p^{2^{m-1}}} \frac{A(\chi, y)}{y^2} dy \right) \left(\int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty} \frac{B(\bar{\chi}, z)}{z^2} dz \right)$$

$$= \sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(a) \left(\int_{\frac{p}{a}}^{p^{2^{m-1}}} \frac{A(\chi, y)}{y^2} dy \right) \left(\int_{p^{2^{m-1}}}^{p^{3 \cdot 2^{m-2}}} \frac{B(\bar{\chi}, z)}{z^2} dz \right) +$$

$$+ \sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(a) \left(\int_{\frac{p}{a}}^{p^{2^{m-1}}} \frac{A(\chi, y)}{y^2} dy \right) \left(\int_{p^{3 \cdot 2^{m-2}}}^{\infty} \frac{B(\bar{\chi}, z)}{z^2} dz \right)$$

$$= \int_{\frac{p}{a}}^{p^{2^{m-1}}} \int_{p^{2^{m-1}}}^{p^{3 \cdot 2^{m-2}}} \frac{1}{y^2 z^2} \sum_{\frac{p}{a} \leqslant n \leqslant y} \sum_{p \leqslant l \leqslant z} d_m(n) d_m(l) \sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(an) \bar{\chi}(l) dydz +$$

$$+ \int_{\frac{p}{a}}^{p^{2^{m-1}}} \int_{p^{3 \cdot 2^{m-2}}}^{\infty} \frac{1}{y^2 z^2} \sum_{\chi \neq \chi_0} \sum_{\frac{p}{a} \leqslant n \leqslant y} \chi(an) d_m(n) B(\bar{\chi}, z) dydz$$

$$\leqslant \left| p \int_{\frac{p}{a}}^{p^{2^{m-1}}} \int_{p^{2^{m-1}}}^{p^{3 \cdot 2^{m-2}}} \frac{1}{y^2 z^2} \sideset{}{'}\sum_{\frac{p}{a} \leqslant n \leqslant y} \sideset{}{'}\sum_{\substack{p \leqslant l \leqslant z \\ an \equiv l (\bmod p)}} d_m(n) d_m(l) dydz \right| +$$

$$+ \left| \int_{\frac{p}{a}}^{p^{2^{m-1}}} \int_{p^{3 \cdot 2^{m-2}}}^{\infty} \frac{1}{y^2 z^2} \sideset{}{'}\sum_{\frac{p}{a} \leqslant n \leqslant y} d_m(n) \sum_{\chi \neq \chi_0} |B(\bar{\chi}, z)| dydz \right|$$

$$\ll \left| \int_{\frac{p}{a}}^{p^{2^{m-1}}} \int_{p^{2^{m-1}}}^{p^{3 \cdot 2^{m-2}}} y^{-1+\epsilon} z^{-1+\epsilon} dydz \right| +$$

$$+ \left| \int_{\frac{p}{a}}^{p^{2^{m-1}}} \int_{p^{3 \cdot 2^{m-2}}}^{\infty} y^{-1+\epsilon} p^{\frac{3}{2}} z^{-1-\frac{2}{2^m}+\epsilon} dydz \right|$$

$$\ll p^{\epsilon} + p^{\frac{3}{2}+\epsilon} \left(p^{3 \cdot 2^{m-2}} \right)^{-\frac{2}{2^m}+\epsilon}$$

$$\ll p^{\epsilon}.$$

利用与N_2类似的估计方法, 可以得到

$$N_3 \ll p^{\epsilon}.$$

对于N_4, 由Cauchy不等式和引理5.8, 可以得到

$$\begin{aligned}
N_4 &= \sum_{\chi\neq\chi_0} \chi(a) \left(\int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty} \frac{A(\chi,y)}{y^2}dy\right)\left(\int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty} \frac{B(\bar{\chi},z)}{z^2}dz\right) \\
&= \int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty}\int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty} \frac{1}{y^2z^2}\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)A(\chi,y)B(\bar{\chi},z)dydz \\
&\leqslant \int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty}\int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty} \frac{1}{y^2z^2}\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)A(\chi,y)B(\bar{\chi},z)\right| dydz \\
&\leqslant \int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty}\int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty} \frac{1}{y^2z^2}\sum_{\chi\neq\chi_0}|A(\chi,y)|\cdot|B(\bar{\chi},z)|\,dydz \\
&\leqslant \int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty}\int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty} \frac{1}{y^2z^2}\left(\sum_{\chi\neq\chi_0}|A(\chi,y)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{\chi\neq\chi_0}|B(\bar{\chi},z)|^2\right)^{\frac{1}{2}} dydz \\
&\ll \int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty}\int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty} \frac{1}{y^2z^2}\left(y^{2-\frac{4}{2^m}+\epsilon}p^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(z^{2-\frac{4}{2^m}+\epsilon}p^2\right)^{\frac{1}{2}} dydz \\
&\leqslant p^2 \int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty} y^{-1-\frac{2}{2^m}+\epsilon}dy\cdot\int_{p^{2^{m-1}}}^{\infty} z^{-1-\frac{2}{2^m}+\epsilon}dz \\
&\ll p^2\left(p^{2^{m-1}}\right)^{-\frac{2}{2^m}+\epsilon}\cdot\left(p^{2^{m-1}}\right)^{-\frac{2}{2^m}+\epsilon} \\
&= p^{\epsilon}.
\end{aligned}$$

因此由N_1, N_2, N_3 和N_4 的估计得到了

$$M_4 = O\left(p^{\epsilon}\right).$$

综合(i), (ii), (iii)和(iv)的分析立即得到

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)|L(1,\chi)|^{2m} = \frac{p\,d_m(a)}{a}\zeta^{2m-1}(2)\prod_{p_0}A(m,p_0,s)+O(p^{\epsilon}),$$

其中$\prod_{p_0}$ 表示对所有不同于p 的素数求积且

$$A(m,p,s) = \sum_{i=0}^{2m-2}\frac{1}{p^{is}}\sum_{j=0}^{i}(-1)^jC_{2m-1}^{j}\left(C_{m+i-j-1}^{i-j}\right)^2,$$

$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$. 这就完成了引理5.9的证明.

引理 5.10 设$p \geqslant 3$ 是素数且χ 是模p的Dirichlet特征. 则对任意正整数m 有

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|L(1,\chi)|^{2m} = p\,\zeta^{2m-1}(2)\prod_{p_0}\left(1-\frac{1-C_{2m-2}^{m-1}}{p_0^2}\right)+O(p^{\epsilon}),$$

其中ϵ 是任意固定的正整数, $\prod_{p_0}$ 表示对所有不同于p 的素数求积.

证明: 参阅文献[127]中的引理6, 并令q取素数.

本节将完成定理5.3的证明. 首先由引理5.5 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{a=1}^{p-1}\chi(a)e\left(\frac{f(a)}{p}\right)\right|^2|L(1,\chi)|^{2m}\\
=&\sum_{\chi\neq\chi_0}\left(p-1+\sum_{a=2}^{p-1}\chi(a)\sum_{b=1}^{p-1}e\left(\frac{g(b,a)}{p}\right)\right)|L(1,\chi)|^{2m}\\
=&(p-1)\sum_{\chi\neq\chi_0}|L(1,\chi)|^{2m}+\sum_{a=2}^{p-1}\sum_{b=1}^{p-1}e\left(\frac{g(b,a)}{p}\right)\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)|L(1,\chi)|^{2m}\\
=&(p-1)\sum_{\chi\neq\chi_0}|L(1,\chi)|^{2m}\\
&+\sum_{a=2}^{p-1}{}'\sum_{b=1}^{p-1}e\left(\frac{g(b,a)}{p}\right)\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)|L(1,\chi)|^{2m}\\
&+\sum_{a=2}^{p-1}{}''\sum_{b=1}^{p-1}e\left(\frac{g(b,a)}{p}\right)\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)|L(1,\chi)|^{2m},
\end{aligned}$$

其中$g(b,a)=\sum_{i=0}^{k}a_i(a^i-1)b^i$, $b_i=a_i(a^i-1)$ 且$\sum_{a=2}^{p-1}{}'\sum_{b=1}^{p-1}$ 与$\sum_{a=2}^{p-1}{}''\sum_{b=1}^{p-1}$ 分别表示对满足条件$p\nmid(b_0,b_1,\ldots,b_k)$ 和$p|(b_0,b_1,\ldots,b_k)$ 求和. 下面将分别估计这两个和式.

(1)当$p\nmid(b_0,b_1,\ldots,b_k)$, 根据引理5.6和引理5.9 有

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{a=2}^{p-1}{}'\sum_{b=1}^{p-1}e\left(\frac{g(b,a)}{p}\right)\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)|L(1,\chi)|^{2m}\right|\\
\leqslant&\sum_{a=2}^{p-1}{}'\left|\sum_{b=1}^{p-1}e\left(\frac{g(b,a)}{p}\right)\right|\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)|L(1,\chi)|^{2m}\right|\\
\ll&\sum_{a=2}^{p-1}p^{1-\frac{1}{k}+\epsilon}\left|\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(a)|L(1,\chi)|^{2m}\right|\\
\ll&p^{2-\frac{1}{k}+\epsilon}\sum_{a=2}^{p-1}\frac{d_m(a)}{a}\\
\ll&p^{2-\frac{1}{k}+\epsilon},
\end{aligned}$$

上式用到了$d_m(a) \ll a^{\epsilon}$.

(2)当$p \mid (b_0, b_1, \ldots, b_k)$时, 即$p \mid b_0, p \mid b_1, \ldots, p \mid b_k$; 由于$p \nmid (a_0, a_1, \ldots, a_k)$, 则至少存在一个$a_l$ 使得$p \nmid a_l$, 因此对于这个l 一定有$p \mid (a^l - 1)$, 即同余方程

$$a^l \equiv 1(\bmod p)$$

成立. 而在集合$\{2, 3, \cdots, p-1\}$中, 满足$p \mid (a^l - 1)$ 的a 的个数至多有$l-1$ 个. 由于已经知道$l - 1 < l \leqslant k$, $a^l > a^l - 1 \geqslant p$, 于是有$a > p^{\frac{1}{l}} \geqslant p^{\frac{1}{k}}$. 因此由引理5.6和引理5.9 有

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{a=2}^{p-1}{}'' \sum_{b=1}^{p-1} e\left(\frac{g(b,a)}{p}\right) \sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(a) |L(1,\chi)|^{2m}\right| \\
\leqslant &\sum_{a=2}^{p-1}{}'' \left|\sum_{b=1}^{p-1} e\left(\frac{g(b,a)}{p}\right)\right| \left|\sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(a) |L(1,\chi)|^{2m}\right| \\
\ll &\sum_{a=2}^{p-1}{}'' (p-1) \frac{p\, d_m(a)}{a} \\
\ll &p^2 \left(\max_{p^{1/k} \leqslant a < p} \left(\frac{d_m(a)}{a}\right)\right) \times \sharp\{a : a \in \{2, 3, \ldots, p-1\},\ a^l \equiv 1(\bmod\ p)\} \\
\ll &kp^{2-\frac{1}{k}+\epsilon}, \\
\ll &p^{2-\frac{1}{k}+\epsilon},
\end{aligned}$$

其中$d_m(a)$仍然利用了(1)中估计的方法.

因此结合(1), (2)和引理5.10 立即可以得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{\chi \neq \chi_0} \left|\sum_{a=1}^{p-1} \chi(a) e(\frac{f(a)}{p})\right|^2 |L(1,\chi)|^{2m} \\
= &|(p-1) \sum_{\chi \neq \chi_0} |L(1,\chi)|^{2m}| \\
&+ O\left(\left|\sum_{a=2}^{p-1}{}' \sum_{b=1}^{p-1} e\left(\frac{g(b,a)}{p}\right) \sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(a) |L(1,\chi)|^{2m}\right|\right) \\
&+ O\left(\left|\sum_{a=2}^{p-1}{}'' \sum_{b=1}^{p-1} e\left(\frac{g(b,a)}{p}\right) \sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(a) |L(1,\chi)|^{2m}\right|\right) \\
= &p^2 \zeta^{2m-1}(2) \prod_{p_0} \left(1 - \frac{1 - C_{2m-2}^{m-1}}{p_0^2}\right) + O(p^{2-\frac{1}{k}+\epsilon}),
\end{aligned}$$

其中$\prod_{p_0}$ 表示对所有不同于p的素数求积, $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$, 大$O$ 常数依赖于k 和ϵ. 因此

得到了渐近公式

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{a=1}^{p-1}\chi(a)e\left(\frac{f(a)}{p}\right)\right|^2|L(1,\chi)|^{2m}$$
$$=p^2\zeta^{2m-1}(2)\prod_{p_0}\left(1-\frac{1-C_{2m-2}^{m-1}}{p_0^2}\right)+O(p^{2-\frac{1}{k}+\epsilon}).$$

这样就完成了定理5.3的证明.

5.3 广义Dirichlet L-函数

设$q\geqslant 3$ 是整数, 且χ是模q的Dirichlet特征, 对任意实数$a\geqslant 0$, 考虑如下定义的广义Dirichlet L-函数

$$L(s,\chi,a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{(n+a)^s},$$

其中$s=\sigma+it$ 满足$\sigma>0$ 和t 都是实数. 利用解析延拓也可以把它扩展到整个复平面(除去$s=1$, χ 为主特征的情况). 关于广义Dirichlet L-函数, Bruce C. Berndt[130−132]研究了许多满足某种限制条件的恒等式. 其中最著名的一个是当χ是一个模q的原特征时, Dirichlet L-函数$L(s,\chi)$ 满足函数方程

$$R(s,\chi)=\left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{(s+b)}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+b)\right)L(s,\chi)=\frac{\tau(\chi)}{i^b\sqrt{q}}R(1-s,\bar{\chi}),$$

其中

$$b=\begin{cases}0,\chi(-1)=1,\\1,\chi(-1)=-1.\end{cases}$$

对$\sigma>\frac{1}{2}-m$ 且m是正整数, Berndt[132]得到了

$$L(s,\chi,a)=\frac{a^{-s}}{\Gamma(s)}\left(\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(-1)^j\Gamma(s+j)L(-j,\chi)}{j!\,a^j}+G(s)\right),$$

其中$G(s)$ 是解析函数. 当n 为非正整数时, 容易计算出$L(n,\chi,a)$, 特别地, $L(0,\chi,a)=L(0,\chi)$. 同时, 关于Dirichlet L-函数的均值性质也有许多学者都作了研究(参阅文献[133-136]).

当模q为素数p时, I. Sh. Slavutskiĭ[133]在1986年给出了

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|L(1,\chi)|^2=\frac{\pi^2}{6}p-\log^2 p+\theta\log p,$$

其中, 当$p\leqslant 35$时, $|\theta|<10$.

张文鹏[136]则研究了对一般模q的Dirichlet L-函数的均值性质, 得到了

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|L(1,\chi)|^2=\frac{\pi^2}{6}\phi(q)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)-\frac{\phi^2(q)}{q^2}\left(\log q+\sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1}\right)^2+O(\log\log q),$$

其中$\phi(q)$是Euler函数, $\sum_{p|q}$表示对q的不同素因子求和, $\prod_{p|q}$表示对q的不同素因子求积.

D.R. Heath-Brown[137]研究了Dirichlet L-函数在$s=\frac{1}{2}$上的均值性质

$$\sum_{\chi \bmod q}\left|L\left(\frac{1}{2},\chi\right)\right|^2=\frac{\phi(q)}{q}\sum_{k|q}\mu\left(\frac{q}{k}\right)T(k),$$

其中$T(k)$ 有渐近公式

$$T(k)=\left(\log\frac{k}{8\pi}+\gamma\right)+2\zeta\left(\frac{1}{2}\right)^2k^{\frac{1}{2}}+\sum_{n=0}^{2N-1}c_nk^{-\frac{n}{2}}+O(k^{-n}),$$

满足$N\geqslant 1$,c_n是可计算的常数且γ是Euler常数.

除此之外, R. Balasubramanian[138]得到了Dirichlet L-函数在$\sigma=\frac{1}{2}$线上的渐近公式

$$\sum_{\chi \bmod q}\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^2=\frac{\phi^2(q)}{q}\log(qt)+O(q(\log\log q)^2)+O(te^{10\sqrt{\log q}})+O(q^{\frac{1}{2}}t^{\frac{2}{3}}e^{10\sqrt{\log q}}),$$

其中$t\geqslant 3$ 且对所有的q 都成立.

在本节中, 如果取$s=1$, $a\geqslant 1$, 对这个广义Dirichlet L-函数的均值非常感兴趣, 即想要得到

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|\,L(1,\chi,a)|^2$$

的渐近公式, 其中χ 是模q 的Dirichlet特征且χ_0 表示主特征. 另一方面, 广义黎曼假设指出Dirichlet L-函数的所有非显然零点都位于直线$\sigma=\frac{1}{2}$上. 这一问题吸引了历史上众多杰出学者的研究, 并且他们中有一些已经得到了关于Dirichlet L-函数的零点分布的重要规律, 但是仍旧没有达到人们所预期的那样完美. 因此这一问题是值得继续研究的一个重要课题. 本节则用一种发散的眼光研究广义Dirichlet L-函数在$\sigma=\frac{1}{2}$线上的均值性质, 从而给出

$$\sum_{\chi \bmod q}\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi,a\right)\right|^2$$

的另一个渐近公式, 其中χ 是模q的Dirichlet特征, $0\leqslant a\leqslant 1$.

关于广义Dirichlet L-函数的均值性质的研究, 目前所知甚少. 至少还没有找到任何相关的参考文献. 尽管如此学者们依然很感兴趣, 因为这至少可以找到广义Dirichlet L-函数与Dirichlet L-函数的之间的某种联系. 即证明了如下的两个定理:

定理 5.4 设$q\geqslant 3$ 是整数且χ 是模q 的Dirichlet特征. Hurwitz ζ函数定义如下, 对于任

意的复数s, 有

$$\zeta s,a=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s}\quad (a>0,s=\sigma+it,\sigma>1). \tag{5-15}$$

则对任意正实数$a\geqslant 1$, 有如下渐近公式:

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|L(1,\chi,a)|^2=\phi(q)\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d^2}\zeta\left(2,\frac{a}{d}\right)-\frac{4\phi(q)}{a}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{k=1}^{[\frac{a}{d}]}\frac{1}{k}+O\left(\frac{\phi(q)\log q}{\sqrt{q}}\right),$$

其中$\phi(q)$ 是Euler函数, $\mu(d)$ 是Möbius函数, 大O常数仅依赖于a.

显然, 当$d>a$时, 定理5.4可简化为

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|L(1,\chi,a)|^2=\phi(q)\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d^2}\zeta\left(2,\frac{a}{d}\right)+O\left(\frac{\phi(q)\log q}{\sqrt{q}}\right);$$

而当$d=a$ 时, 定理5.4即变为

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|L(1,\chi,a)|^2=\frac{\pi^2\phi(q)}{6}\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)-\frac{4\phi^2(q)}{aq}+O\left(\frac{\phi(q)\log q}{\sqrt{q}}\right).$$

用类似方法, 也可以得到关于广义Dirichlet L-函数的$2k$ $(k\geqslant 2)$次均值

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|L(1,\chi,a)|^{2k}.$$

定理 5.5 设$q\geqslant 3$ 是整数且$t\geqslant 3$ 是实数, χ 是模q 的Dirichlet特征. 则对任意正实数$0\leqslant a\leqslant 1$, 有下面的渐近公式

$$\sum_{\chi \bmod q}\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi,a\right)\right|^2=\frac{\phi^2(q)}{q}\left(\log\left(\frac{qt}{2\pi}\right)+2\gamma+\sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1}\right)-\phi(q)\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\beta_{a/d}$$
$$+O\left(qt^{-\frac{1}{12}}+t^{\frac{5}{6}}\log^3 t2^{\omega(q)}+q^{\frac{1}{2}}t^{\frac{5}{12}}\log t2^{\omega(q)}\right),$$

其中$\phi(q)$ 是Euler函数, $\beta_x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(n+x)}$ 是依赖于x 的一个可计算的常数, 且$\omega(q)$ 表示q的不同素因子的个数.

显然, 当$a=0$时, 立即可以得到Dirichlet L函数在$\sigma=\frac{1}{2}$线上均值的渐近公式. 因此这一结果是前面结果的一个推广. 对于广义Dirichlet L-函数的$2k$ $(k\geqslant 2)$ 次均值

$$\sum_{\chi \bmod q}\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi,a\right)\right|^{2k},$$

受目前方法的限制还无法得到它的渐近公式. 甚至对$k=2$, 也无法获得一个好的渐近公式. 因此这需要进一步思考更加有效的方法.

5.3.1 关于定理5.4

为了证明定理5.4, 需要下面的几个引理. 首先给出Dirichlet L-函数与其广义形式的一个恒等式.

引理 5.11 设$q \geqslant 3$ 是整数, 且χ 是模q的Dirichlet特征. $L(s,\chi)$ 为对应特征为χ的Dirichlet L-函数, 而$L(s,\chi,a)$ 为广义Dirichlet L函数. 则对任意的实数$a \geqslant 0$, 有

$$L(1,\chi,a) = L(1,\chi) - a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n(n+a)}.$$

证明: 根据Dirichlet L-函数及其广义形式的定义, 有

$$\begin{aligned}L(1,\chi,a) - L(1,\chi) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n+a} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\chi(n)}{n+a} - \frac{\chi(n)}{n}\right)\\ &= -a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n(n+a)},\end{aligned}$$

移项得

$$L(1,\chi,a) = L(1,\chi) - a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n(n+a)}.$$

这就证明了引理5.11.

引理 5.12 设q 是整数且$q \geqslant 3$ 且χ 是模q 的Dirichlet特征. 记$A(y,\chi) = \sum_{N\leqslant n\leqslant y}\chi(n)d(n)$. 则有如下估计

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|A(y,\chi)|^2 \ll y\phi^2(q),$$

证明: 参阅文献[127]中的引理4, 且令$k=2$.

引理 5.13 设$q \geqslant 3$ 是整数且χ 是模q 的Dirichlet特征. 则有

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|L(1,\chi)|^2 = \phi(q)\zeta(2)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right) + O(q^{\epsilon}),$$

其中$\phi(q)$ 是Euler函数, 且$\prod_{p|q}$ 表示对q 的所有不同素因子求积, ϵ 是任意给定的正数.

证明: 参阅文献[127]中的引理6并令$k=2$.

引理 5.14 设$q \geqslant 3$ 是整数且χ 是模q 的Dirichlet特征. 则对任意正实数$a \geqslant 1$, 有

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}(n)}{n(n+a)}L(1,\chi)$$

$$=\frac{\phi(q)}{a}\zeta(2)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+\frac{\phi(q)}{a^2}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{k=1}^{[\frac{a}{d}]}\frac{1}{k}+O\left(\frac{\phi(q)\log q}{\sqrt{q}}\right).$$

证明: 首先应用Abel恒等式有

$$L(1,\chi)=\sum_{n=1}^{q}\frac{\chi(n)}{n}+\int_q^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}dy,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}(n)}{n(n+a)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\bar{\chi}(n)}{n(n+a)}+\int_N^{+\infty}\frac{(2y+a)A(\bar{\chi},y)}{y^2(y+a)^2}dy,$$

其中$A(\chi,y)=\sum_{q<n<y}\chi(n)$, 且$N>q$ 是整数. 由此有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\chi\neq\chi_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}(n)}{n(n+a)}L(1,\chi)\\
=&\sum_{\chi\neq\chi_0}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\bar{\chi}(n)}{n(n+a)}+\int_N^{+\infty}\frac{(2y+a)A(\bar{\chi},y)}{y^2(y+a)^2}dy\right)\left(\sum_{n=1}^{q}\frac{\chi(n)}{n}+\int_q^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}dy\right)\\
=&\sum_{\chi\neq\chi_0}\sum_{n=1}^{N}\frac{\bar{\chi}(n)}{n(n+a)}\sum_{m=1}^{q}\frac{\chi(m)}{m}+\sum_{\chi\neq\chi_0}\sum_{n=1}^{N}\frac{\bar{\chi}(n)}{n(n+a)}\int_q^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}dy+\\
&+\sum_{\chi\neq\chi_0}\sum_{n=1}^{q}\frac{\chi(n)}{n}\int_N^{+\infty}\frac{(2y+a)A(\bar{\chi},y)}{y^2(y+a)^2}dy+\\
&+\sum_{\chi\neq\chi_0}\int_N^{+\infty}\frac{(2y+a)A(\bar{\chi},y)}{y^2(y+a)^2}dy\int_q^{+\infty}\frac{A(\chi,z)}{z^2}dz\\
\equiv&A_1+A_2+A_3+A_4.
\end{aligned}$$

将估计上式最后一个等号中的每一项. 首先估计A_1. 由特征的正交性, Cauchy不等式和引理5.13, 得到

$$\begin{aligned}
A_1=&\sum_{\chi\neq\chi_0}\sum_{n=1}^{N}\frac{\bar{\chi}(n)}{n(n+a)}\sum_{m=1}^{q}\frac{\chi(m)}{m}\\
=&\sum_{\chi \bmod q}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{q}\frac{\chi(m)\bar{\chi}(n)}{mn(n+a)}+O(\log q)\\
=&\sum_{n=1}^{N}{}'\sum_{m=1}^{q}{}'\frac{1}{mn(n+a)}\sum_{\chi \bmod q}\chi(m)\bar{\chi}(n)+O(\log q)\\
=&\phi(q)\sum_{\substack{n=1\\ m\equiv n(\bmod q)}}^{N}{}'\sum_{m=1}^{q}{}'\frac{1}{mn(n+a)}+O(\log q)\\
=&\phi(q)\sum_{m=1}^{q}{}'\frac{1}{m^2(m+a)}+\phi(q)\sum_{k=1}^{N/q}{}'\sum_{m=1}^{q}{}'\frac{1}{m(kq+m)(kq+m+a)}+O(\log q)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\phi(q)\sum_{m=1}^{q}\frac{1}{m^2(m+a)}\sum_{d|(m,q)}\mu(d)+\\
&\quad+O\left(\phi(q){\sum_{k=1}^{N/q}}'{\sum_{m=1}^{q}}'\frac{1}{m(kq+m)(kq+m+a)}+\log q\right)\\
&=\phi(q)\sum_{d|q}\mu(d)\sum_{\substack{m=1\\ d|m}}^{q}\frac{1}{m^2(m+a)}+O\left(\log q\right)\\
&=\phi(q)\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d^3}\sum_{m=1}^{q/d}\frac{1}{m^2(m+a/d)}+O\left(\log q\right)\\
&=\phi(q)\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2(m+a/d)}+\\
&\quad+O\left(\phi(q)\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d^3}\sum_{m=q/d}^{\infty}\frac{1}{m^2(m+a/d)}\right)+O\left(\log q\right)\\
&=\phi(q)\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d^3}\left(\frac{1}{(a/d)^2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{a/d}{m^2}+\frac{1}{m+a/d}-\frac{1}{m}\right)\right)+O\left(\log q\right)\\
&=\phi(q)\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d^3}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{d}{am^2}+\frac{d^2}{a^2}\left(\frac{1}{m+a/d}-\frac{1}{m}\right)\right)\right)+O\left(\log q\right)\\
&=\frac{\phi(q)}{a}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d^2}\zeta(2)+\frac{\phi(q)}{a^2}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{k=1}^{[a/d]}\frac{1}{k}+O\left(\log q\right)\\
&=\frac{\phi(q)}{a}\zeta(2)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+\frac{\phi(q)}{a^2}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{k=1}^{[a/d]}\frac{1}{k}+O\left(\log q\right).
\end{aligned}
$$

下面继续估计A_2, A_3 和A_4. 根据引理5.12, 关于特征和的Pólya不等式以及Cauchy不等式, 利用简单的估计, 有

$$
\begin{aligned}
|A_2|&=\sum_{\chi\neq\chi_0}\sum_{n=1}^{N}\frac{\bar{\chi}(n)}{n(n+a)}\int_q^{+\infty}\frac{A(\chi,y)}{y^2}dy\\
&\leqslant\sum_{\chi\neq\chi_0}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+a)}\int_q^{+\infty}\frac{\left|\sum_{q<n<y}\chi(n)\right|}{y^2}dy\\
&\ll q^{\frac{1}{2}}\phi(q)\log q\int_q^{\infty}\frac{1}{y^2}dy\\
&\ll\frac{\phi(q)\log q}{\sqrt{q}},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
|A_3| &= \sum_{\chi\neq\chi_0}\sum_{n=1}^{q}\frac{\chi(n)}{n}\int_N^{+\infty}\frac{(2y+a)A(\bar{\chi},y)}{y^2(y+a)^2}dy \\
&\ll \log q\int_N^{\infty}\frac{2y+a}{y^2(y+a)^2}\sum_{\chi\neq\chi_0}|A(\bar{\chi},y)|dy \\
&\ll \log q\int_N^{\infty}\frac{2y+a}{y^2(y+a)^2}\left(\sum_{\chi\neq\chi_0}1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\chi\neq\chi_0}|A(\bar{\chi},y)|^2\right)^{\frac{1}{2}}dy \\
&\ll \frac{\phi^{\frac{3}{2}}(q)\log q}{N\sqrt{N}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|A_4| &= \sum_{\chi\neq\chi_0}\int_N^{+\infty}\frac{(2y+a)A(\bar{\chi},y)}{y^2(y+a)^2}dy\int_q^{+\infty}\frac{A(\chi,z)}{z^2}dz \\
&\leqslant \int_N^{\infty}\int_q^{\infty}\frac{2y+a}{y^2(y+a)^2z^2}\sum_{\chi\neq\chi_0}|A(\bar{\chi},y)|\cdot|A(\chi,z)|dydz \\
&\leqslant \int_N^{\infty}\int_q^{\infty}\frac{2y+a}{y^2(y+a)^2z^2}\left(\sum_{\chi\neq\chi_0}|A(\bar{\chi},y)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\chi\neq\chi_0}|A(\chi,z)|^2\right)^{\frac{1}{2}}dydz \\
&\ll \frac{\phi^2(q)}{N\sqrt{N}\sqrt{q}},
\end{aligned}$$

取$N=q^2$, 于是有

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}(n)}{n(n+a)}L(1,\chi)=\frac{\phi(q)}{a}\zeta(2)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+\frac{\phi(q)}{a^2}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{k=1}^{[\frac{a}{d}]}\frac{1}{k}+O\left(\frac{\phi(q)\log q}{\sqrt{q}}\right).$$

因此证明了引理5.14.

引理 5.15 设$q\geqslant 3$ 是整数且χ 是模q 的Dirichlet特征, 则对任意正实数$a\geqslant 1$, 有如下渐近公式

$$\begin{aligned}
\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n(n+a)}\right|^2 &= \frac{\phi(q)}{a^2}\zeta(2)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+\frac{\phi(q)}{a^2}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d^2}\zeta\left(2,\frac{a}{d}\right) \\
&\quad -\frac{2\phi(q)}{a^3}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{k=1}^{[\frac{a}{d}]}\frac{1}{k}+O\left(\frac{\phi(q)\log q}{q}\right).
\end{aligned}$$

证明: 设$N>q$ 为任一整数, 利用特征的正交性, Pólya不等式以及引理5.12, 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n(n+a)}\right|^2 \\
=&\sum_{\chi\neq\chi_0}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{\chi(n)}{n(n+a)}+\int_N^{+\infty}\frac{(2y+a)A(\chi,y)}{y^2(y+a)^2}dy\right)\times
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \left(\sum_{m=1}^{N} \frac{\bar{\chi}(m)}{m(m+a)} + \int_N^{+\infty} \frac{(2z+a)A(\bar{\chi},z)}{z^2(z+a)^2} dz \right) \\
=& \sum_{\chi \neq \chi_0} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\chi(n)}{n(n+a)} \right) \left(\sum_{m=1}^{N} \frac{\bar{\chi}(m)}{m(m+a)} \right) + \\
&+ \sum_{\chi \neq \chi_0} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\chi(n)}{n(n+a)} \right) \left(\int_N^{+\infty} \frac{(2z+a)A(\bar{\chi},z)}{z^2(z+a)^2} dz \right) + \\
&+ \sum_{\chi \neq \chi_0} \left(\int_N^{+\infty} \frac{(2y+a)A(\chi,y)}{y^2(y+a)^2} dy \right) \left(\sum_{m=1}^{N} \frac{\bar{\chi}(m)}{m(m+a)} \right) + \\
&+ \sum_{\chi \neq \chi_0} \left(\int_N^{+\infty} \frac{(2y+a)A(\chi,y)}{y^2(y+a)^2} dy \right) \left(\int_N^{+\infty} \frac{(2z+a)A(\bar{\chi},z)}{z^2(z+a)^2} dz \right) \\
=& \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+a)} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m(m+a)} \left(\sum_{\chi \neq \chi_0} \chi(n)\bar{\chi}(m) \right) + \\
&+ O\left(\int_N^{+\infty} \frac{(2y+a)\sum_{\chi\neq\chi_0} |A(\chi,y)|}{y^2(y+a)^2} dy \right) \\
=& \phi(q) \sideset{}{'}\sum_{\substack{n=1 \\ m\equiv n(\bmod q)}}^{N} \sideset{}{'}\sum_{m=1}^{N} \frac{1}{mn(m+a)(n+a)} + O(1) + O\left(\frac{\phi^{\frac{3}{2}}(q)}{N^{\frac{3}{2}}} \right) \\
=& \phi(q) \sideset{}{'}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(n+a)^2} + 2\phi(q) \sideset{}{'}\sum_{\substack{n=1 \\ m\equiv n(\bmod q),\, m>n}}^{N} \sideset{}{'}\sum_{m=1}^{N} \frac{1}{mn(m+a)(n+a)} + O(1) \\
=& \phi(q) \sideset{}{'}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(n+a)^2} + O\left(\phi(q) \sideset{}{'}\sum_{k=1}^{N/q} \sideset{}{'}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+a)(kq+n)(kq+n+a)} \right) + O(1) \\
=& \phi(q) \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2(n+a)^2} \sum_{d|(n,q)} \mu(d) + O\left(\frac{\phi(q)\log N}{q} \right) + O(1) \\
=& \phi(q) \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^4} \sum_{n=1}^{N/d} \frac{1}{n^2(n+a/d)^2} + O\left(\frac{\phi(q)\log N}{q} \right) \\
=& \phi(q) \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+a/d)^2} + \\
&+ O\left(\phi(q) \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^4} \sum_{n=N/d}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+a/d)^2} \right) + O\left(\frac{\phi(q)\log N}{q} \right) \\
=& \phi(q) \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d^4} \left(\frac{d^3}{a^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a/d}{(n+a/d)^2} + \frac{a/d}{n^2} + \frac{2}{n+a/d} - \frac{2}{n} \right) \right) + O\left(\frac{\phi(q)\log N}{q} \right)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\phi(q)}{a^2}\zeta(2)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+$$

$$+\frac{\phi(q)}{a^2}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d^2}\zeta\left(2,\frac{a}{d}\right)-\frac{2\phi(q)}{a^3}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{k=1}^{[\frac{a}{d}]}\frac{1}{k}+O\left(\frac{\phi(q)\log N}{q}\right).$$

取$N=q^2$, 则得到

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n(n+a)}\right|^2=\frac{\phi(q)}{a^2}\zeta(2)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+\frac{\phi(q)}{a^2}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d^2}\zeta\left(2,\frac{a}{d}\right)$$

$$-\frac{2\phi(q)}{a^3}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{k=1}^{[\frac{a}{d}]}\frac{1}{k}+O\left(\frac{\phi(q)\log q}{q}\right).$$

这样就证明了引理5.15.

本节主要完成定理5.4的证明. 由引理5.11, 引理5.12, 引理5.13, 可以立即得到定理5.4. 即对任意$q\geqslant 3$, 有

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|L(1,\chi,a)|^2$$

$$=\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|L(1,\chi)-a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n(n+a)}\right|^2$$

$$=\sum_{\chi\neq\chi_0}|L(1,\chi)|^2-a\sum_{\chi\neq\chi_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{\chi}(n)}{n(n+a)}L(1,\chi)-$$

$$-a\sum_{\chi\neq\chi_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n(n+a)}L(1,\bar{\chi})+a^2\sum_{\chi\neq\chi_0}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n(n+a)}\right|^2$$

$$=\left(\phi(q)\zeta(2)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+O(q^{\epsilon})\right)$$

$$-2a\left(\frac{\phi(q)}{a}\zeta(2)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+\frac{\phi(q)}{a^2}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{k=1}^{[\frac{a}{d}]}\frac{1}{k}+O\left(\frac{\phi(q)\log q}{\sqrt{q}}\right)\right)$$

$$+a^2\left(\frac{\phi(q)}{a^2}\zeta(2)\prod_{p|q}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+\frac{\phi(q)}{a^2}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d^2}\zeta\left(2,\frac{a}{d}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{2\phi(q)}{a^3}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{k=1}^{[\frac{a}{d}]}\frac{1}{k}+O\left(\frac{\phi(q)\log q}{q}\right)\right)$$

$$=\phi(q)\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d^2}\zeta\left(2,\frac{a}{d}\right)-\frac{4\phi(q)}{a}\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{k=1}^{[\frac{a}{d}]}\frac{1}{k}+O\left(\frac{\phi(q)\log q}{\sqrt{q}}\right).$$

这就完成了定理5.4的证明.

5.3.2 关于定理5.5

首先简单介绍下本章即将要用到的最重要的方法之一. 这一方法称为驻点法, 它是van der Corput[139] 于20世纪20年代用来处理指数积分与指数和的, 因为数论中许多重大问题的解决需要对这些指数和与指数积分有一个好的渐近公式或者好的估计, 这一方法也通常被人们称为van der Corput 方法. 本节在定理5.5的证明中, 广泛地应用了这一方法. 以下几个性质简单的概括了这一方法:

性质5.1: 设$f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ 是区间$[a, b]$ 上的实值单调连续函数, 并且$|f'(x)| \leqslant \delta < 1, |g(x)| \leqslant h_0, |g'(x)| \leqslant h_1$. 则有

$$\sum_{a<n\leqslant b} g(n)e(f(n)) = \int_a^b g(x)e(f(x))dx + O\left(\frac{h_0+h_1}{1-\delta}\right), \tag{5-16}$$

其中$e(f(x)) = \exp(2\pi i f(x))$, 且大$O$ 常数是绝对的.

性质5.2: 在性质5.1的条件下, 设$g(x)/f'(x)$ 在区间$[a, b]$ 上是单调的, 且满足$f'(x)/g(x) \geqslant m > 0$ 或$-f'(x)/g(x) \geqslant m > 0$. 则有

$$\left|\int_a^b g(x)e^{if(x)}dx\right| \leqslant \frac{4}{m}. \tag{5-17}$$

结合性质5.1和性质5.2, 立即得到

性质5.3: 在性质5.1和性质5.2的条件下, 有

$$\left|\sum_{a<n\leqslant b} g(n)e(f(n))\right| \ll \frac{1}{m} + \frac{h_0+h_1}{1-\delta}. \tag{5-18}$$

另外, 还将用到指数对理论的相关知识. 指数对主要是处理形如

$$S = \sum_{B<n\leqslant B+h} e(f(n)) \qquad (B \geqslant 1, 1 < h \leqslant B)$$

的指数和的模的估计, 以得到S的较好的上界. 希望得到如下形式的关于S的上界

$$S \ll A^{\kappa} B^{\lambda},$$

若$A \ll |f'(x)| \ll A\,(A > \frac{1}{2})$, $0 \leqslant \kappa \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant 1$, 这样的一组非负实数$(\kappa, \lambda)$就称为指数对.

显然, $(\kappa, \lambda) = (0, 1)$ 是指数对, 并且全体指数对组成的集合是一个凸集, 记为$\Delta = \{(t\kappa_1 + (1-t)\kappa_2, t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2)\,|(\kappa_1, \lambda_1)$与$(\kappa_2, \lambda_2)$是指数对$, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. 这些

结果都是很平凡的, 但如果要求$f(x)$ r $(r \geqslant 5)$阶可导且导数满足:

$$AB^{1-r} \ll |f^{(r)}(x)| \ll AB^{1-r} \qquad (r = 1, 2, 3, \cdots),$$

则可以得到关于S的一些非平凡的结果. 例如, 利用$f(x)$ 2阶可导, 有如下性质:

性质5.4: 设$h \geqslant 1$, $f''(x)$ 在区间$[B, B+h]$ 是连续的且满足

$$0 < \lambda \leqslant |f''(x)| \leqslant C\lambda,$$

则有

$$\sum_{B<n\leqslant B+h} e(f(n)) = O\left(Ch\lambda^{\frac{1}{2}} + \lambda^{-\frac{1}{2}}\right),$$

其中大O 常数是绝对的.

从性质5.4 立即可以得到指数对$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 即

$$S \ll B\left(AB^{-1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(AB^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \ll A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}.$$

除此之外, 还可以利用下面的两个性质构造所需要的指数对.

性质5.5: 若(κ, λ)是指数对, 则

$$(\mu, \nu) = \left(\frac{\kappa}{2\kappa+2}, \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\kappa+2}\right)$$

也是指数对.

性质5.6: 若(κ, λ)是指数对同时满足条件

$$\kappa + 2\lambda \geqslant \frac{3}{2},$$

则

$$(\mu, \nu) = \left(\lambda - \frac{1}{2}, \kappa + \frac{1}{2}\right)$$

也是指数对.

因此可以通过性质5.5和性质5.6及前面所说的指数对的凸性来构造所需要的指数对. 例如, 指数对$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$可以认为利用性质5.6由指数对$(0, 1)$得到, 而当利用性质5.5对指数对$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$作用时, 又得到了新的指数对$(\frac{1}{6}, \frac{2}{3})$. 当然也可以反复使用性质5.5, 性质5.6以及指数对的凸性. 如指数对$(\frac{2}{7}, \frac{4}{7})$ 就是对指数对$(\frac{1}{6}, \frac{2}{3})$ 先应用性质5.5, 继而再应用性质5.6而得到的. 指数对理论在实践中应用非常广泛, 本章中用到的指数对仅限于此, 关于更多指数对的讨论可以参阅文献[139].

除了上面的指数对理论, 还需要用到关于Hurwitz ζ函数的渐近函数方程

$$\zeta(s, a) = \sum_{0\leqslant n\leqslant x-a} \frac{1}{(n+a)^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} + O\left(\frac{x^{-\sigma}}{1-C^{-1}}\right), \tag{5-19}$$

此时x满足$x \geqslant \frac{Ct^*}{2\pi}(t^* = \max(2\pi, |t|))$, 且$C > 1$为常数. 当$a = 1$时也可以得到Riemann ζ函数的渐近公式. 本章主要利用如下渐近公式.

性质5.7: 设$s = \sigma + it$, 且实数$x, y > C > 0$ 满足$2\pi xy = t$, 则对于$0 < \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2 < 1, t \geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}\zeta(s,a) = &\sum_{0\leqslant n\leqslant x-a} \frac{1}{(n+a)^s} + A(s) \sum_{1\leqslant v\leqslant y} \frac{e(-av)}{v^{1-s}} + \\ &+O(x^{-\sigma}\log(y+2) + y^{\sigma-1}(|t|+2)^{\frac{1}{2}-\sigma}),\end{aligned} \tag{5-20}$$

其中大O常数依赖于σ_1, σ_2, 且

$$A(s) = \left|\frac{t}{2\pi}\right|^{\frac{1}{2}-\sigma} \exp\left(-i\left(t\log\left|\frac{t}{2\pi e}\right| - \frac{\pi}{4}\right)\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{|t|}\right)\right) \qquad (t \to +\infty).$$

当$t \leqslant 0$, 则式(5-20)变为

$$\begin{aligned}\zeta(s,a) = &\sum_{0\leqslant n\leqslant x-a} \frac{1}{(n+a)^s} + A'(s) \sum_{1\leqslant v\leqslant y} \frac{e(av)}{v^{1-s}} + \\ &+O(x^{-\sigma}\log(y+2) + y^{\sigma-1}(|t|+2)^{\frac{1}{2}-\sigma}),\end{aligned}$$

其中

$$A'(s) = \left|\frac{t}{2\pi}\right|^{\frac{1}{2}-\sigma} \exp\left(-i\left(t\log\left|\frac{t}{2\pi e}\right| + \frac{\pi}{4}\right)\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{|t|}\right)\right) \qquad (t \to -\infty).$$

特别地, 令$s = \frac{1}{2} + it$, 则对任意$t \geqslant 0$, 有

$$\begin{aligned}&\zeta\left(\frac{1}{2}+it, a\right) \\ &= \sum_{0\leqslant n\leqslant x-a} \frac{1}{(n+a)^{\frac{1}{2}+it}} + \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{it} e^{i(t+\frac{\pi}{4})} \sum_{1\leqslant v\leqslant y} \frac{e(-av)}{v^{\frac{1}{2}-it}} + O(x^{-\frac{1}{2}}\log t).\end{aligned} \tag{5-21}$$

为了证明定理5.5, 还需要下面的几个引理.

引理 5.16 设q 是正整数, 有

$$\sum_{d|q} \frac{\mu(d)\log d}{d} = -\frac{\phi(q)}{q} \sum_{p|q} \frac{\log p}{p-1}.$$

证明: 参阅文献[135]中引理2.

引理 5.17 设q 是一正整数, 且$0 \leqslant a \leqslant 1, t \geqslant 2$ 是实数, 而χ 是模q 的Dirichlet特征. 则有恒等式

$$\sum_{\chi \bmod q} \left|L\left(\frac{1}{2}+it, \chi, a\right)\right|^2 = \frac{\phi(q)}{q} \sum_{d|q} \mu(d) \sum_{b=1}^{q/d} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it, \frac{b+a/d}{q/d}\right)\right|^2,$$

其中$\zeta(s,\alpha)$ 是Hurwitz ζ函数, 它可以解析延拓到全平面($s = 1$点除外).

证明: 设$s=\sigma+it$, 且$\sigma>1$, 则广义Dirichlet L-函数绝对收敛, 因此有

$$L(s,\chi,a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{(n+a)^s}=\sum_{b=1}^{q}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\chi(b)}{(nq+b+a)^s}=\frac{1}{q^s}\sum_{b=1}^{q}\chi(b)\zeta\left(s,\frac{b+a}{q}\right).\quad(5\text{-}22)$$

利用模q 的特征和的正交性, 由式(5-22)得

$$\begin{aligned}\sum_{\chi \bmod q}|L(s,\chi,a)|^2&=\frac{1}{q^{2\sigma}}\sum_{\chi \bmod q}\left|\sum_{b=1}^{q}\chi(b)\zeta\left(s,\frac{b+a}{q}\right)\right|^2\\&=\frac{1}{q^{2\sigma}}\sum_{b_1=1}^{q}\zeta\left(s,\frac{b_1+a}{q}\right)\sum_{b_2=1}^{q}\bar{\zeta}\left(s,\frac{b_2+a}{q}\right)\sum_{\chi \bmod q}\chi(b_1)\bar{\chi}(b_2)\\&=\frac{\phi(q)}{q^{2\sigma}}\sum_{\substack{b_1=1\\(b_1,q)=1\\b_1\equiv b_2(\bmod q)}}^{q}\sum_{\substack{b_2=1\\(b_2,q)=1}}^{q}\zeta\left(s,\frac{b_1+a}{q}\right)\bar{\zeta}\left(s,\frac{b_2+a}{q}\right)\\&=\frac{\phi(q)}{q^{2\sigma}}\sum_{\substack{b=1\\(b,q)=1}}^{q}\left|\zeta\left(s,\frac{b+a}{q}\right)\right|^2\\&=\frac{\phi(q)}{q^{2\sigma}}\sum_{b=1}^{q}\left|\zeta\left(s,\frac{b+a}{q}\right)\right|^2\sum_{d|(b,q)}\mu(d)\\&=\frac{\phi(q)}{q^{2\sigma}}\sum_{d|q}\mu(d)\sum_{b=1}^{q/d}\left|\zeta\left(s,\frac{b+a/d}{q/d}\right)\right|^2,\end{aligned}$$

利用$\zeta(s,a)$ 和$L(s,\chi,a)$ 的解析性, 令$s=\frac{1}{2}+it$, 有

$$\sum_{\chi \bmod q}\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi,a\right)\right|^2=\frac{\phi(q)}{q}\sum_{d|q}\mu(d)\sum_{b=1}^{q/d}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it,\frac{b+a/d}{q/d}\right)\right|^2.$$

这样就证明了引理5.17.

以下为了方便, 记$a'=a/d, q'=q/d$.

引理 5.18 设$q'\geqslant 2$ 是整数, 且$0\leqslant a'\leqslant 1, t\geqslant 3$. 则有

$$\left|\sum_{b=1}^{q'}\frac{1}{(\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}+it}}\left(\zeta\left(\frac{1}{2}-it,\frac{b+a'}{q'}\right)-\frac{1}{(\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}-it}}\right)\right|\ll q'^{\frac{1}{2}}t^{\frac{5}{12}}\log t+q't^{-\frac{1}{4}}\log t,\quad(5\text{-}23)$$

其中$\ll$ 常数仅依赖于a'.

证明: 根据性质5.7, 有

$$\zeta\left(\frac{1}{2}-it,\frac{b+a'}{q'}\right)-\frac{1}{\left(\frac{b+a'}{q'}\right)^{\frac{1}{2}-it}}$$

$$= \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{(n + \frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}-it}} + \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{-it} e^{i(-t+\frac{\pi}{4})} \sum_{1 \leqslant v \leqslant y} \frac{e\left(-\frac{b+a'}{q'}v\right)}{v^{\frac{1}{2}+it}} + O(x^{-\frac{1}{2}} \log t),$$

由此立即得到

$$\left| \sum_{b=1}^{q'} \frac{1}{(\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}+it}} \left(\zeta\left(\frac{1}{2} - it, \frac{b+a'}{q'}\right) - \frac{1}{(\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}-it}} \right) \right|$$

$$= \sum_{b=1}^{q'} \frac{1}{(\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}+it}} \times$$

$$\times \left(\sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{(n + \frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}-it}} + \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{-it} e^{i(-t+\frac{\pi}{4})} \sum_{1 \leqslant v \leqslant y} \frac{e\left(-\frac{b+a'}{q'}v\right)}{v^{\frac{1}{2}+it}} + O(x^{-\frac{1}{2}} \log t) \right)$$

$$= \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \sum_{b=1}^{q'} \frac{\left(\frac{n+(b+a')/q'}{(b+a')/q'}\right)^{it}}{(\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}}(n + \frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}}} + \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{-it} e^{i(-t+\frac{\pi}{4})} \sum_{1 \leqslant v \leqslant y} \sum_{b=1}^{q'} \frac{e\left(-\frac{b+a'}{q'}v\right)(\frac{b+a'}{q'}v)^{-it}}{(\frac{b+a'}{q'}v)^{\frac{1}{2}}} +$$

$$+ O(q'x^{-\frac{1}{2}} \log t)$$

$$\equiv M_1 + M_2 + O(q'x^{-\frac{1}{2}} \log t), \tag{5-24}$$

其中x, y 是待定常数, 且$2\pi xy = t$, $0 < C < x, y < t$.

在M_1 中, 知道

$$\left(\frac{n + \frac{b+a'}{q'}}{\frac{b+a'}{q'}}\right)^{it} = \left(\frac{nq' + b + a'}{b + a'}\right)^{it} = e^{it \log \frac{nq'+b+a'}{b+a'}} = e^{2\pi i f(b)},$$

其中记$f(b) = \frac{t}{2\pi} \log \frac{nq'+b+a'}{b+a'}$. 另外, 设$g(b) = \frac{1}{\left(\frac{b+a'}{q'}\right)^{\frac{1}{2}}\left(n+\frac{b+a'}{q'}\right)^{\frac{1}{2}}}$, 利用性质5.3和指数对理论来估计$M_1$, 因此有

$$f'(b) = \frac{t}{2\pi} \frac{-nq'}{(b + a')(nq' + b + a')} < 0, \tag{5-25}$$

$$g'(b) = \frac{-q'(nq' + 2b + 2a')}{(b + a')(nq' + b + a')}. \tag{5-26}$$

当$b + a' > t$ 时, 知道

$$|f'(b)| \leqslant \frac{1}{2\pi} < 1, \tag{5-27}$$

$$|g(b)| \leqslant q't^{-\frac{1}{2}}(nq')^{-\frac{1}{2}} = q'^{\frac{1}{2}}(nt)^{-\frac{1}{2}}, \tag{5-28}$$

$$|g'(b)| \ll qt^{-1}, \tag{5-29}$$

$$-\frac{f'(b)}{g(b)} = \frac{tnq'}{2\pi(b+a')(nq'+b+a')}\frac{(b+a')^{\frac{1}{2}}(nq'+b+a')^{\frac{1}{2}}}{q'}$$
$$= \frac{tn}{2\pi(b+a')^{\frac{1}{2}}(nq'+b+a')^{\frac{1}{2}}} \geqslant \frac{tn}{2\pi(q'+1)^{\frac{1}{2}}(nq'+q'+1)^{\frac{1}{2}}} \geqslant \frac{tn^{\frac{1}{2}}}{q'}. \tag{5-30}$$

当$b+a'<t$ 时, 对于$N<b<N+h<2N$, 且$|f'(b)| \ll \frac{t}{N}$, 利用指数对$\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)$ 估计得到

$$\left|\sum_{N\leqslant b\leqslant N+h\leqslant 2N} e\left(f(b)\right)\right| \ll \left(\frac{t}{N}\right)^{\frac{1}{6}} N^{\frac{2}{3}} \ll t^{\frac{1}{6}}N^{\frac{1}{2}}. \tag{5-31}$$

因此, 由于性质5.3和式(5-27)-(5-31), 有

$$|M_1| \leqslant \sum_{1\leqslant n\leqslant x}\left|\sum_{1\leqslant b\leqslant q'} g(b)e\left(f(b)\right)\right|$$
$$\leqslant \sum_{1\leqslant n\leqslant x}\left|\sum_{b+a'>t} g(b)e\left(f(b)\right)\right| + \sum_{1\leqslant n\leqslant x}\left|\sum_{b+a'\leqslant t} g(b)e\left(f(b)\right)\right|$$
$$\ll \sum_{1\leqslant n\leqslant x}\left|\frac{q'}{n^{\frac{1}{2}}t} + (nt)^{-\frac{1}{2}}q'^{\frac{1}{2}}\right| + \sum_{1\leqslant n\leqslant x}\left|\sum_{j\ll\log t}\ \sum_{2^{j-1}<b<2^j} g(b)e\left(f(b)\right)\right|$$
$$\ll \sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{q'}{n^{\frac{1}{2}}t} + O\left(q'^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right) + \sum_{1\leqslant n\leqslant x}\left|\sum_{j\ll\log t}\max_{1\leqslant N\leqslant t-a'}\left|\sum_{N<b<2N} g(b)e\left(f(b)\right)\right|\right|$$
$$\ll q'x^{\frac{1}{2}}t^{-1} + q'^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}} +$$
$$+\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\left|\log t\max_{1\leqslant N\leqslant t-a'}\frac{1}{(\frac{N+a'}{q'})^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{(n+\frac{N+a'}{q'})^{\frac{1}{2}}}\max_{1\leqslant N\leqslant t-a'}\left|\sum_{N<b<N+h<2N} e\left(f(b)\right)\right|\right|$$
$$\ll q'x^{\frac{1}{2}}t^{-1} + q'^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}} + \sum_{1\leqslant n\leqslant x}\log t\left|\max_{1\leqslant N\leqslant t-a'}\frac{q'}{\sqrt{N}\sqrt{n}\sqrt{q'}}\left|\sum_{N<b<N+h<2N} e\left(f(b)\right)\right|\right|$$
$$\ll q'x^{\frac{1}{2}}t^{-1} + q'^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}} + \sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{\sqrt{q'}}{\sqrt{n}}\log t\max_{1\leqslant N\leqslant t-a'}\frac{1}{\sqrt{N}}\left|\sum_{N\leqslant b\leqslant N+h\leqslant 2N} e\left(f(b)\right)\right|$$
$$\ll q'x^{\frac{1}{2}}t^{-1} + q'^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}} + \sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{\sqrt{q'}}{\sqrt{n}}\log t\max_{1\leqslant N\leqslant t-a'}\frac{1}{\sqrt{N}}\ t^{\frac{1}{6}}N^{\frac{1}{2}}$$
$$\ll q'x^{\frac{1}{2}}t^{-1} + q'^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}} + q'^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{6}}\log t$$
$$\ll q'x^{\frac{1}{2}}t^{-1} + q'^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{6}}\log t. \tag{5-32}$$

类似地, 也可以得到M_2的估计,

$$M_2 \ll q'y^{\frac{1}{2}}t^{-1} + q'^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{6}}\log t. \tag{5-33}$$

因此, 由式(5-24), (5-32)和(5-33), 有

$$\left|\sum_{b=1}^{q'}\frac{1}{(\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}+it}}\left(\zeta\left(\frac{1}{2}-it,\frac{b+a'}{q'}\right)-\frac{1}{(\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}-it}}\right)\right|$$
$$\ll q'\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)t^{-1}+q'^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)t^{\frac{1}{6}}\log t+q'x^{-\frac{1}{2}}\log t.$$

取$x=y=\sqrt{\frac{t}{2\pi}}$, 得到

$$\left|\sum_{b=1}^{q'}\frac{1}{(\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}+it}}\left(\zeta\left(\frac{1}{2}-it,\frac{b+a'}{q'}\right)-\frac{1}{(\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}-it}}\right)\right|\ll q'^{\frac{1}{2}}t^{\frac{5}{12}}\log t+q't^{-\frac{1}{4}}\log t.$$

这就证明了引理5.18.

引理 5.19 设$q'\geqslant 2$ 是整数, 且$0\leqslant a'\leqslant 1, t\geqslant 3$. 则有

$$\sum_{b=1}^{q'}\left|\left(\zeta\left(\frac{1}{2}+it,\frac{b+a'}{q'}\right)-\frac{1}{(\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}+it}}\right)\right|^2$$
$$=q'\left(\log\frac{q't}{(q'+a')2\pi}+\gamma\right)+O(q't^{-\frac{1}{12}})+O(t^{\frac{5}{6}}\log^3 t)+O\left(q'^{\frac{1}{2}}\log t\right),$$

其中γ 是Euler常数, 且大O 常数仅依赖于a'.

证明: 根据性质5.7, 利用解析延拓有

$$\begin{aligned}
&\sum_{b=1}^{q'}\left|\left(\zeta\left(\frac{1}{2}+it,\frac{b+a'}{q'}\right)-\frac{1}{(\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}+it}}\right)\right|^2\\
=&\sum_{b=1}^{q'}\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{\left(n+\frac{b+a'}{q'}\right)^{\frac{1}{2}+it}}+\left(\frac{2\pi}{t}\right)^{it}e^{i(t+\frac{\pi}{4})}\sum_{1\leqslant v\leqslant y}\frac{e\left(-\frac{b+a'}{q'}v\right)}{v^{\frac{1}{2}-it}}+O(x^{-\frac{1}{2}}\log t)\right|^2\\
=&\sum_{b=1}^{q'}\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{(n+\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}+it}}\right|^2+\sum_{b=1}^{q'}\left|\sum_{1\leqslant v\leqslant y}\frac{e(-\frac{b+a'}{q'}v)}{v^{\frac{1}{2}-it}}\right|^2+\\
&+\sum_{b=1}^{q'}\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{(n+\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}+it}}\right)\left(\left(\frac{2\pi}{t}\right)^{-it}e^{-i(t+\frac{\pi}{4})}\sum_{1\leqslant v\leqslant y}\frac{e(\frac{b+a'}{q'}v)}{v^{\frac{1}{2}+it}}\right)+\\
&+\sum_{b=1}^{q'}\left(\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{(n+\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}-it}}\right)\left(\left(\frac{2\pi}{t}\right)^{it}e^{i(t+\frac{\pi}{4})}\sum_{1\leqslant v\leqslant y}\frac{e(-\frac{b+a'}{q'}v)}{v^{\frac{1}{2}-it}}\right)+\\
&+O\left(x^{-\frac{1}{2}}\log t\sum_{1\leqslant b\leqslant q'}\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{(n+\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}+it}}+\left(\frac{2\pi}{t}\right)^{it}e^{i(t+\frac{\pi}{4})}\sum_{1\leqslant v\leqslant y}\frac{e(-\frac{b+a'}{q'}v)}{v^{\frac{1}{2}-it}}\right|\right)+\\
&+O\left(x^{-1}\log^2 t\right)\\
\equiv& A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+O\left(x^{-1}\log^2 t\right).
\end{aligned}\tag{5-34}$$

将估计式(5-34)中每一项.

(i)首先估计A_1. 由式(5-34) 有

$$\begin{aligned}A_1 &= \sum_{b=1}^{q'}\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{(n+\frac{b+a'}{q'})^{\frac12+it}}\right|^2\\ &=\sum_{b=1}^{q'}\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\sum_{1\leqslant m\leqslant x}\frac{1}{(n+\frac{b+a'}{q'})^{\frac12+it}}\frac{1}{(m+\frac{b+a'}{q'})^{\frac12-it}}\\ &=\sum_{b=1}^{q'}\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{n+\frac{b+a'}{q'}}+\sum_{b=1}^{q'}\sum_{1\leqslant m<n\leqslant x}\frac{1}{(n+\frac{b+a'}{q'})^{\frac12+it}}\frac{1}{(m+\frac{b+a'}{q'})^{\frac12-it}}+\\ &\quad+\sum_{b=1}^{q'}\sum_{1\leqslant n<m\leqslant x}\frac{1}{(n+\frac{b+a'}{q'})^{\frac12+it}}\frac{1}{(m+\frac{b+a'}{q'})^{\frac12-it}}\\ &=q'\sum_{b=1}^{q'}\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{nq'+b+a'}+\sum_{b=1}^{q'}\sum_{1\leqslant m<n\leqslant x}\frac{1}{(n+\frac{b+a'}{q'})^{\frac12+it}}\frac{1}{(m+\frac{b+a'}{q'})^{\frac12-it}}\\ &\quad+\sum_{b=1}^{q'}\sum_{1\leqslant m<n\leqslant x}\frac{1}{(n+\frac{b+a'}{q'})^{\frac12-it}}\frac{1}{(m+\frac{b+a'}{q'})^{\frac12+it}}\\ &=q'A_{11}+A_{12}+A_{13}.\end{aligned}\tag{5-35}$$

显然, A_{13} 与A_{12} 共轭. 因此只需估计A_{11} 和A_{12}. 对于A_{11}, 因为

$$\sum_{n=1}^{q}\frac{1}{n+a}=\sum_{n=1}^{q}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{q}\frac{a}{n(n+a)}=\log q+\gamma-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n(n+a)}+O(q^{-1}),$$

有

$$\begin{aligned}A_{11}&=\sum_{b=1}^{q'}\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{nq'+b+a'}\\ &=\sum_{1\leqslant n\leqslant q'([x]+1)}\frac{1}{n+a'}-\sum_{1\leqslant n\leqslant q'}\frac{1}{n+a'}\\ &=\log(q'([x]+1))+\gamma-\beta_{a'}+O\left(\frac{1}{q'x}\right)-\left(\log q'+\gamma-\beta_{a'}+O\left(\frac{1}{q'}\right)\right)\\ &=\log x+O\left(\frac{1}{q'}\right),\end{aligned}\tag{5-36}$$

其中$\beta_{a'}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a'}{n(n+a')}$.

下面估计A_{12}. 首先有

$$A_{12}=\sum_{b=1}^{q'}\sum_{1\leqslant m<n\leqslant x}\frac{\left(\frac{m+\frac{b+a'}{q'}}{n+\frac{b+a'}{q}}\right)^{it}}{(n+\frac{b+a'}{q'})^{\frac12}(m+\frac{b+a'}{q'})^{\frac12}}$$

$$= \sum_{1\leqslant m<n\leqslant x} \sum_{b=1}^{q'} \frac{e^{it\log \frac{mq'+b+a'}{nq'+b+a'}}}{(n+\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}}(m+\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}}}. \tag{5-37}$$

令

$$f(b) = \frac{t}{2\pi}\log\frac{mq'+b+a'}{nq'+b+a'}, \tag{5-38}$$

$$g(b) = \left(n+\frac{b+a'}{q'}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(m+\frac{b+a'}{q'}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{5-39}$$

显然, $g(b)$ 是单调下降的, 且知道

$$f'(b) = \frac{t}{2\pi}\frac{(n-m)q'}{(mq'+b+a')(nq'+b+a')} > 0, \tag{5-40}$$

$$f''(b) = \frac{-t(n-m)q'((n+m)q'+2(b+a'))}{2\pi(mq'+b+a')^2(nq'+b+a')^2} < 0, \tag{5-41}$$

$$g'(b) = -\frac{q'}{2}\frac{q'(m+a')+2(b+a')}{(nq'+b+a')^{\frac{3}{2}}(mq'+b+a')^{\frac{3}{2}}}. \tag{5-42}$$

因此, $f(b)$ 是单调上升的, 而$f'(b)$ 是单调下降的.

当$t \leqslant \frac{mnq'}{n-m}$, 有

$$|f'(b)| = \frac{t}{2\pi}\frac{(n-m)q'}{(mq'+b+a')(nq'+b+a')} \leqslant \frac{1}{2\pi} < 1, \tag{5-43}$$

$$|g(b)| = \frac{1}{\left(n+\frac{b+a'}{q'}\right)^{\frac{1}{2}}\left(m+\frac{b+a'}{q'}\right)^{\frac{1}{2}}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{mn}} \tag{5-44}$$

$$|g'(b)| = \frac{q'\left(q'(m+n)+2(b+a')\right)}{2\left(nq'+b+a'\right)^{\frac{3}{2}}\left(mq'+b+a'\right)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{mn}}, \tag{5-45}$$

$$\frac{f'(b)}{g(b)} = \frac{t(n-m)}{2\pi(mq'+b+a')^{\frac{1}{2}}(nq'+b+a')^{\frac{1}{2}}} \gg \frac{(n-m)t}{\sqrt{mn}q'}. \tag{5-46}$$

由此及根据性质5.3和式(5-35), (5-43)-(5-46), 得到

$$\begin{aligned}|A_{12}| &\ll \sum_{1\leqslant m<n\leqslant x}\left(\frac{1}{\frac{(n-m)t}{\sqrt{mn}q'}} + \frac{1}{\sqrt{mn}}\right)\\ &\ll q't^{-1}\sum_{1\leqslant m<n\leqslant x}\frac{\sqrt{mn}}{n-m} + x\end{aligned}$$

$$= q't^{-1}\sum_{k=1}^{x-1}\sum_{m=1}^{x-1}\frac{\sqrt{m(m+k)}}{k}+x$$
$$\ll q't^{-1}x^2\log t. \tag{5-47}$$

当$t>\frac{mnq'}{n-m}$时, 由式(5-41), 有

$$\frac{t(n-m)}{m^2q'^2n}\ll|f''(b)|\ll\frac{t(n-m)}{m^2q'^2n},$$

因此由性质5.4 和式(5-37), 有

$$|A_{12}|\ll\sum_{1\leqslant m<n\leqslant x}\frac{\log q}{\left(n+\frac{1+a'}{q'}\right)^{\frac12}\left(m+\frac{1+a'}{q'}\right)^{\frac12}}\max_{1\leqslant N\leqslant q'}\left|\sum_{N<b<N+h<2N}e^{it\log\frac{mq'+b+a'}{nq'+b+a'}}\right|$$
$$\ll\sum_{1\leqslant m<n\leqslant x}\frac{\log t}{\left(n+\frac{1+a'}{q'}\right)^{\frac12}\left(m+\frac{1+a'}{q'}\right)^{\frac12}}\times$$
$$\times\max_{1\leqslant v\leqslant q'}\left|q'\left(\frac{t(n-m)}{m^2q'^2n}\right)^{\frac12}+\left(\frac{t(n-m)}{m^2q'^2n}\right)^{-\frac12}\right|$$
$$\ll\sum_{1\leqslant m<n\leqslant x}\frac{\sqrt{t}\log t}{\sqrt{n}\sqrt{m^3}}+\sum_{1\leqslant m<n\leqslant x}\frac{\sqrt{t}\log t}{\sqrt{nm}}$$
$$\ll t^{\frac12}x\log t+q'x^2t^{-1}\log t. \tag{5-48}$$

所以, 由式(5-37), (5-47)和(5-48), 有

$$|A_{12}|\ll\left(q't^{-1}x^2+t^{\frac12}x\right)\log t. \tag{5-49}$$

因此, 由式(5-35), (5-36)和(5-49), 得到

$$A_1=q'\log x+O\left((q't^{-1}x^2+t^{\frac12}x)\log t\right). \tag{5-50}$$

同时, 利用Cauchy不等式, 有

$$\sum_{b=1}^{q'}\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{(n+\frac{b+a'}{q'})^{\frac12+it}}\right|\leqslant\left(\sum_{b=1}^{q'}1^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{b=1}^{q'}\left|\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{(n+\frac{b+a'}{q'})^{\frac12+it}}\right|^2\right)^{\frac12}$$
$$\ll q'\log^{\frac12}t. \tag{5-51}$$

(ii)对于A_2, 因为$\sum\limits_{1\leqslant u\leqslant y}\frac1u=\log y+\gamma+O\left(\frac{1}{q'}\right)$, 有

$$A_2=\sum_{b=1}^{q'}\left|\sum_{1\leqslant v\leqslant y}\frac{e(-\frac{b+a'}{q'}v)}{v^{\frac12-it}}\right|^2$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{1\leqslant u\leqslant y}\sum_{1\leqslant v\leqslant y}\sum_{b=1}^{q'}\frac{e^{2\pi i\frac{b+a'}{q'}(v-u)}}{u^{\frac{1}{2}-it}v^{\frac{1}{2}+it}}\\
&=q'\sum_{1\leqslant u\leqslant y}\frac{1}{u}+O\left(q'\sum_{\substack{1\leqslant u<v\leqslant y\\ u\equiv v(\bmod q')}}\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}}\right)\\
&=q'(\log y+\gamma+O(q'^{-1}))+O\left(q'\sum_{1\leqslant k\leqslant[\frac{y}{q'}]}\sum_{1\leqslant u\leqslant y}\frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{kq'+u}}\right)\\
&=q'(\log y+\gamma)+O\left(q'^{\frac{3}{4}}\sum_{1\leqslant k\leqslant[\frac{y}{q'}]}\frac{1}{k^{\frac{1}{4}}}\sum_{1\leqslant u\leqslant y}\frac{1}{u^{\frac{3}{4}}}\right)\\
&=q'(\log y+\gamma)+O(y).
\end{aligned}\tag{5-52}
$$

利用Cauchy不等式, 立即得到

$$
\begin{aligned}
\sum_{b=1}^{q'}\left|\sum_{1\leqslant v\leqslant y}\frac{e(-\frac{b+a'}{q'}v)}{v^{\frac{1}{2}-it}}\right|&\leqslant\left(\sum_{b=1}^{q'}1^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{b=1}^{q'}\left|\sum_{1\leqslant v\leqslant y}\frac{e(-\frac{b+a'}{q'}v)}{v^{\frac{1}{2}-it}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\ll q'\log^{\frac{1}{2}}t.
\end{aligned}\tag{5-53}
$$

(iii) 设$x<y$, $2\pi xy=t$, 则根据性质5.7, 有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{0\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{(n+\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}+it}}+\left(\frac{2\pi}{t}\right)^{it}e^{i(t+\frac{\pi}{4})}\sum_{1\leqslant v\leqslant y}\frac{e(-\frac{b+a'}{q'}v)}{v^{\frac{1}{2}-it}}+O\left(x^{-\frac{1}{2}}\log t\right)\\
=&\sum_{0\leqslant n\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\frac{1}{(n+\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}+it}}+\left(\frac{2\pi}{t}\right)^{it}e^{i(t+\frac{\pi}{4})}\sum_{1\leqslant v\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\frac{e(-\frac{b+a'}{q'}v)}{v^{\frac{1}{2}-it}}+O\left(t^{-\frac{1}{4}}\log t\right).
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{2\pi}{t}\right)^{it}e^{i(t+\frac{\pi}{4})}\sum_{1\leqslant v\leqslant y}\frac{e(-\frac{b+a'}{q'}v)}{v^{\frac{1}{2}-it}}\\
=&\left(\frac{2\pi}{t}\right)^{it}e^{i(t+\frac{\pi}{4})}\sum_{1\leqslant v\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\frac{e(-\frac{b+a'}{q'}v)}{v^{\frac{1}{2}-it}}\\
&+\sum_{x<n\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\frac{1}{(n+\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}+it}}+O\left(x^{-\frac{1}{2}}\log t\right).
\end{aligned}\tag{5-54}
$$

由A_3 的定义和式(5-54), (5-51) 立即得到

$$
A_3=\sum_{b=1}^{q'}\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\frac{1}{(n+\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}+it}}\left(\left(\frac{2\pi}{t}\right)^{-it}e^{-i(t+\frac{\pi}{4})}\sum_{1\leqslant v\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\frac{e(\frac{b+a'}{q'}v)}{v^{\frac{1}{2}+it}}+\right.
$$

$$+\sum_{x\leqslant n\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\frac{1}{(n+\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}-it}}+O\left(x^{-\frac{1}{2}}\log t\right)\Bigg)$$

$$=\left(\frac{2\pi}{t}\right)^{-it}e^{-i(t+\frac{\pi}{4})}\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\sum_{1\leqslant v\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\frac{1}{v^{\frac{1}{2}+it}}\sum_{b=1}^{q'}\frac{e(\frac{b+a'}{q'}v)}{\left(n+\frac{b+a'}{q'}\right)^{\frac{1}{2}+it}}+$$

$$+\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\sum_{x\leqslant m\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\sum_{b=1}^{q'}\frac{1}{\left(n+\frac{b+a'}{q'}\right)^{\frac{1}{2}+it}\left(m+\frac{b+a'}{q'}\right)^{\frac{1}{2}-it}}+$$

$$+O\left(q'^{\frac{1}{2}}\log t\right)$$

$$=A_{31}+A_{32}+O\left(q'^{\frac{1}{2}}\log t\right). \tag{5-55}$$

对于A_{32}, 可以利用与估计A_1 类似的方法得到, 因此有

$$|A_{32}|\ll q'x^{\frac{3}{2}}t^{-\frac{3}{4}}+t^{\frac{3}{4}}x^{\frac{1}{2}}\log t. \tag{5-56}$$

对于A_{31}, 由式(5-55), 有

$$|A_{31}|\leqslant\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\sum_{1\leqslant v\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\frac{1}{v^{\frac{1}{2}+it}}\sum_{b=1}^{q'}\frac{e^{2\pi i\frac{b+a'}{q'}v}\left(n+\frac{b+a'}{q'}\right)^{-it}}{\left(n+\frac{b+a'}{q'}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\leqslant\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\sum_{1\leqslant v\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}}\frac{1}{v^{\frac{1}{2}}}\left|\sum_{b=1}^{q'}\frac{e^{2\pi i\frac{b+a'}{q'}v-it\log\left(n+\frac{b+a'}{q'}\right)}}{\left(n+\frac{b+a'}{q'}\right)^{\frac{1}{2}}}\right|. \tag{5-57}$$

令

$$f(b)=\frac{b+a'}{q'}v-\frac{t}{2\pi}\log\left(n+\frac{b+a'}{q'}\right),$$

$$g(b)=\left(n+\frac{b+a'}{q'}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

显然, $g(b)$ 是单调下降的, 简单计算得到

$$f'(b)=\frac{v}{q'}-\frac{t}{2\pi(nq'+b+a')},$$

$$f''(b)=\frac{t}{2\pi(nq'+b+a')^2},$$

$$g'(b)=-\frac{1}{2q'\left(n+\frac{b+a'}{q'}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

因此, 当$t \leqslant nq'$ 时,

$$|f'(b)| = \left|\frac{v}{q'} - \frac{t}{2\pi(nq'+b+a')}\right| \leqslant \frac{t}{2\pi(nq'+b+a')} \leqslant \frac{t}{2\pi nq'} \leqslant \frac{1}{2\pi} < 1, \tag{5-58}$$

$$|g(b)| \leqslant \left|\left(n + \frac{b+a'}{q'}\right)^{-\frac{1}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}, \tag{5-59}$$

$$|g'(b)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}, \tag{5-60}$$

而

$$\begin{aligned} -\frac{f'(b)}{g(b)} &= \left(\frac{t}{2\pi(nq'+b+a')} - \frac{v}{q'}\right)\left(n + \frac{b+a'}{q'}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &> \left(\frac{t}{2\pi(nq'+b+a')} - \frac{v}{q'}\right)\left(n + \frac{1+a'}{q'}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\gg \frac{t}{nq'}\sqrt{n} \gg \frac{t}{q'\sqrt{n}}. \end{aligned} \tag{5-61}$$

因此, 由性质5.3 和式(5-57)-(5-61), 有

$$\begin{aligned} |A_{31}| &\ll \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \sum_{1 \leqslant v \leqslant \sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{\frac{t}{q'\sqrt{n}}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &\ll q't^{-1} \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \sqrt{n} \sum_{1 \leqslant v \leqslant \sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{1}{\sqrt{v}} \\ &\ll q't^{-\frac{3}{4}} x^{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \tag{5-62}$$

当$t > nq'$ 时, 有$\frac{t}{n^2q'^2} \ll |f''(b)| \ll \frac{t}{n^2q'^2}$, 所以根据性质5.4 和式(5-57), 得到

$$\begin{aligned} |A_{31}| &\ll \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \sum_{1 \leqslant v \leqslant \sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} \frac{\log q'}{\sqrt{n}} \max_{1 < N < q'} \left|\sum_{N < b < N+h < 2N} e^{2\pi i f(b)}\right| \\ &\ll \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \sum_{1 \leqslant v \leqslant \sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} \frac{\log q'}{\sqrt{n}} \left[q'\left(\frac{t}{n^2q'^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{n^2q'^2}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\ll \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \sum_{1 \leqslant v \leqslant \sqrt{\frac{t}{2\pi}}} \frac{\log t}{\sqrt{nv}} \left(\frac{\sqrt{t}}{n} + \frac{nq'}{\sqrt{t}}\right) \\ &\ll t^{\frac{3}{4}} x^{\frac{1}{2}} \log t + q't^{-\frac{1}{4}} x^{\frac{3}{2}} \log t. \end{aligned} \tag{5-63}$$

结合式(5-62)和(5-63), 有

$$|A_{31}| \ll q't^{-\frac{3}{4}} x^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{3}{4}} x^{\frac{1}{2}} \log t + q't^{-\frac{1}{4}} x^{\frac{3}{2}} \log t$$

$$\ll q' x^{\frac{3}{2}} t^{-\frac{1}{4}} \log t + t^{\frac{3}{4}} x^{\frac{1}{2}} \log t. \tag{5-64}$$

因此, 由式(5-55), (5-56)和(5-64), 有

$$|A_3| \ll q' x^{\frac{3}{2}} t^{-\frac{3}{4}} + t^{\frac{3}{4}} x^{\frac{1}{2}} \log t + q'^{\frac{1}{2}} \log t. \tag{5-65}$$

知道A_4 与A_3 是共轭的, 所以有类似的估计, 即

$$|A_4| \ll q' x^{\frac{3}{2}} t^{-\frac{3}{4}} + t^{\frac{3}{4}} x^{\frac{1}{2}} \log t + q'^{\frac{1}{2}} \log t. \tag{5-66}$$

(iv)这部分将估计A_5. 由式(5-34), (5-51)和(5-53), 立即得到

$$\begin{aligned}
|A_5| &\ll x^{-\frac{1}{2}} \log t \sum_{1 \leqslant b \leqslant q'} \left| \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{\left(n + \frac{b+a'}{q'}\right)^{\frac{1}{2}+it}} + \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{it} e^{i(t+\frac{\pi}{4})} \sum_{1 \leqslant v \leqslant y} \frac{e\left(-\frac{b+a'}{q'} v\right)}{v^{\frac{1}{2}-it}} \right| \\
&\leqslant x^{-\frac{1}{2}} \log t \left(\sum_{1 \leqslant b \leqslant q'} \left| \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{\left(n + \frac{b+a'}{q'}\right)^{\frac{1}{2}+it}} \right| + \sum_{1 \leqslant b \leqslant q'} \left| \sum_{1 \leqslant v \leqslant y} \frac{e\left(-\frac{b+a'}{q'} v\right)}{v^{\frac{1}{2}-it}} \right| \right) \\
&\leqslant q' x^{-\frac{1}{2}} \log^{\frac{3}{2}} t.
\end{aligned}$$

综上所述, 结合(i), (ii), (iii)和(iv)四部分的证明, 立即得到

$$\begin{aligned}
A = & q' \log x + q'(\log y + \gamma) + O\left(q' t^{-1} x^{\frac{1}{2}} \log t\right) + \\
& + O\left(t^{\frac{1}{2}} x \log t\right) + O(y) + O\left(q' x^{\frac{3}{2}} t^{-\frac{3}{4}}\right) + O\left(q'^{\frac{1}{2}} \log t\right) \\
& + O\left(t^{\frac{3}{4}} x^{\frac{1}{2}} \log t\right) + O\left(q' x^{-\frac{1}{2}} \log^{\frac{3}{2}} t\right) + O\left(x^{-1} \log^2 t\right).
\end{aligned} \tag{5-67}$$

令$x = t^{\frac{1}{6}} \log^3 t,\ y = \frac{t}{2\pi x}$, 有

$$A = q' \log \frac{t}{2\pi} + q' \gamma + O\left(q' t^{-\frac{1}{12}}\right) + O\left(t^{\frac{5}{6}} \log^{\frac{5}{2}} t\right) + O\left(q'^{\frac{1}{2}} \log t\right). \tag{5-68}$$

这就证明了引理5.19.

这一节, 将完成定理5.5的证明. 根据引理5.17很容易得到

$$\begin{aligned}
& \sum_{\chi \bmod q} \left| L\left(\frac{1}{2} + it, \chi, a\right) \right|^2 \\
= & \frac{\phi(q)}{q} \sum_{d \mid q} \mu(d) \sum_{b=1}^{q'} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it, \frac{b+a'}{q'}\right) \right|^2 \\
= & \frac{\phi(q)}{q} \sum_{d \mid q} \mu(d) \sum_{b=1}^{q'} \left| \frac{1}{(\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}+it}} + \left(\zeta\left(\frac{1}{2} + it, \frac{b+a'}{q'}\right) - \frac{1}{(\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}+it}} \right) \right|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{\phi(q)}{q}\sum_{d|q}\mu(d)\sum_{b=1}^{q'}\frac{q'}{b+a'}\\
&\quad+\frac{\phi(q)}{q}\sum_{d|q}\mu(d)\sum_{b=1}^{q'}\frac{1}{(\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}+it}}\left(\zeta\left(\frac{1}{2}-it,\frac{b+a'}{q'}\right)-\frac{1}{(\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}-it}}\right)+\\
&\quad+\frac{\phi(q)}{q}\sum_{d|q}\mu(d)\sum_{b=1}^{q'}\frac{1}{(\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}-it}}\left(\zeta\left(\frac{1}{2}+it,\frac{b+a'}{q'}\right)-\frac{1}{(\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}+it}}\right)+\\
&\quad+\frac{\phi(q)}{q}\sum_{d|q}\mu(d)\sum_{b=1}^{q'}\left|\left(\zeta\left(\frac{1}{2}+it,\frac{b+a'}{q'}\right)-\frac{1}{(\frac{b+a'}{q'})^{\frac{1}{2}+it}}\right)\right|^2.
\end{aligned}
$$

再由引理5.18, 5.19和5.16, 对任意实数$t\geqslant 3$, 有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\chi \bmod q}\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi,a\right)\right|^2\\
&=\frac{\phi(q)}{q}\sum_{d|q}\mu(d)q'\left(\log(q')+\gamma-\beta_{a'}+O\left(q'^{-1}\right)\right)+\\
&\quad+\frac{\phi(q)}{q}\sum_{d|q}\mu(d)\left(q'\left(\log\frac{t}{2\pi}+\gamma\right)+O(q't^{-\frac{1}{12}}+t^{\frac{5}{6}}\log^3 t+q'^{\frac{1}{2}}\log t)\right)+\\
&\quad+O\left(\frac{\phi(q)}{q}\sum_{d|q}|\mu(d)|(q'^{\frac{1}{2}}t^{\frac{5}{12}}\log t+q't^{-\frac{1}{4}}\log t)\right)\\
&=\phi(q)\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\left(\log\left(\frac{qt}{2\pi}\right)+2\gamma\right)-\phi(q)\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\beta_{a/d}-\phi(q)\sum_{d|q}\frac{\mu(d)\log d}{d}+\\
&\quad+O\left(\phi(q)t^{-\frac{1}{12}}\sum_{d|q}\frac{|\mu(d)|}{d}+\frac{\phi(q)}{q}t^{\frac{5}{6}}\log^3 t\sum_{d|q}|\mu(d)|+\frac{\phi(q)}{q^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{5}{12}}\log t\sum_{d|q}\frac{|\mu(d)|}{d^{\frac{1}{2}}}\right)\\
&=\frac{\phi^2(q)}{q}\left(\log\left(\frac{qt}{2\pi}\right)+2\gamma+\sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1}\right)-\phi(q)\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\beta_{a/d}\\
&\quad+O\left(qt^{-\frac{1}{12}}+t^{\frac{5}{6}}\log^3 t2^{\omega(q)}+q^{\frac{1}{2}}t^{\frac{5}{12}}\log t2^{\omega(q)}\right),
\end{aligned}
$$

其中$\beta_x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(n+x)}$ 是一个与x 有关的可计算的常数, 且$\omega(q)$ 表示q的不同素因子的个数. 上式中利用了估计式$\sum_{d|q}\frac{|\mu(d)|}{d}\ll\frac{q}{\phi(q)}$. 这就完成了定理5.5的证明.

参考文献

[1] Dumitrescu V. Seleacu. The Smarandache function. Erhus University Press, 1996.

[2] Florian Luca. The average Smarandache function. Smarandache Notions Journal, 2001(12), 1(2-3): 19-27.

[3] Florian Luca.On a series involving $S(1)\cdot S(2)\cdots S(n)$. Smarandache Notions Journal, 1999(10), 1(2-3): 128-129.

[4] 张文鹏. 初等数论. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

[5] 潘承洞. 潘承彪. 解析数论基础. 北京: 科学出版社, 1999.

[6] Tom M. Apostol. Introduction to analytic number theory. New York: Spring-Verlag, 1976.

[7] Smarandache F. Only problems, not solutions. Chicago: Xiquan Publication House, 1993.

[8] Chen Jianbin. Value distribution od the F. Smarandache LCM function. Scientia Magna, 2007, 3(2): 15-18.

[9] Ma Jinping. An equation involving the Smarandache function. Scientia Magna, 2005, 1(2): 89-90.

[10] Yi Yuan. An equation involving the Euler function and Smarandache function, 2005, 1(2): 172-175.

[11] 黄寿生. 陈锡庚. 关于数论函数方程$\varphi(n) = S(n^5)$. 华南师范大学学报, 2007, 4: 41-43.

[12] 郑涛. 关于数论函数方程$\varphi(n) = S(n^t)$. 中国科教创新导刊, 2009, (2): 154-154.

[13] Mark Farris and Patrick Mitchell. Bounding the Smarandache function. Smarandache Notions J, 2008, 13: 37-42.

[14] Murthy A. Some notions on least common multipies. Smarandache Notions Journal, 2001, 12: 307-309.

[15] Erdös P. Problem 6674. American Mathematical Monthly, 1991, 98, 965.

[16] 吴欣. 关于含伪Smarandache函数及其对偶函数的方程的可解性. 西南大学学报(自然科学版), 2011, 33(8): 102-105.

[17] 赵院娥. 关于Smarandache和的均值. 西南师范大学学报(自然科学版), 2011, 36(1):

44-47.

[18] 陈姣. 一类包含Smarandache和函数的Dirichlet级数. 西南师范大学学报(自然科学版), 2011, 36(1): 39-43.

[19] Le Maohua. An equation concerning the Smarandache LCM function. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 186-188.

[20] Lv Zhongtian. On the F. Smarandache LCM function and its mean value. Scientia Magna, 2007, 3(1): 22-25.

[21] Tian Chengliang. Two equations involving the Smarandache LCM function. Scientia Magna, 2007, 3(2): 80-85.

[22] Le Maohua. Two formulas for Smarandache LCM ratio sequences. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 183-185.

[23] Wang Ting. A formula for Smarandache LCM ratio sequence. Research on Smarandache problems in number theory, 2005, 45-46.

[24] 陈斌. 关于Smarandache LCM函数对偶函数的方程. 渭南师范学院学报, 2012, 27(2): 21-23.

[25] Aleksandar Ivic. On a problem of erdos involving the largest prime factor of n. M. Math., 2005, 145: 35-46.

[26] Faris Mark and Mitchell Patrick. Bounding the Smarandache function. Smarandache Notions Journal, 1999, 10: 81-86.

[27] Sandor J. On a dual of the Pseudo-Smarandache function. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 18-23.

[28] Lu Yaming. On the solutions of an equation involving the Smarandache function. Scientia Magna, 2006, 2, 76-79.

[29] 张文鹏. 关于F.Smarandache 函数的两个问题. 西北大学学报, 2008, 38: 173-175.

[30] A. A. K. Majumdar. A note on the Pseudo-Smarandache function. Scientia Magna, 2006, 2: 1-25.

[31] 潘承洞. 潘承彪. 素数定理的初等证明. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[32] 乐茂华. 关于Smarandache函数的一个猜想. 黑龙江大学学报(自然科学版), 2007, 24(5): 687-688.

[33] Wang Yougxing. On the Smarandache function. Research on Smarandache Problem in Number Theory, 2005, 2: 103-106.

[34] Murthy A. Smarandache determinant sequences. Smarandache Notions Journal, 2001, 12: 275-278.

[35] Le Maohua. Two classes of Smarandache determinants. Scientia Magna, 2006, 2(1):

20-25.

[36] 徐哲峰. 关于Smarandache函数的值分布. 数学学报(中文版), 2009, 49(5): 1009-1012.

[37] Le Maohua. Two function equations. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 180-182.

[38] Gorskid. The Pseudo-Smarandache functions. Smarandache Notions Journal, 2000, 12: 140-145.

[39] Sandor J. On additive analogues of certain arithmetic function. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 128-132.

[40] Kashhaeak. Comments and topics on Smarandache notions and problems. New Mexico: Erhus University Press, 1996.

[41] Guy R. K. Unsolved problems in number theory. New York: Springer Verlag, 1981: 25- 56.

[42] Ashbacher C. On numbers that are Pseudo-Smarandache and Smarandache perfects. Smarandache Notions Journal, 2004, 15: 40-42.

[43] Farris M. and Mitchell P. Bounding the Smarandache functions. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 37-42.

[44] 华罗庚. 数论异引. 北京: 科学出版社, 1979: 121-123.

[45] 乐茂华. 关于Smarandache完全数. 河南师范大学学报(自然科学版), 2007, 35(4): 13-14.

[46] Smarandache F. Sequences of numbers involved in unsolved problems. Hexis, 2006.

[47] 闫晓霞. Smarandache LCM 函数与其对偶函数的混合均值. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版), 2010, 39(3): 229-231.

[48] 朱敏慧. 关于F. Smarandache 简单函数与Dirichlet除数和函数的混合均值. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版), 2010, 39(5): 441-443.

[49] Nan Wu. On the Smarandache 3π digital sequence and the Zhang Wenpeng's conjecture. Scientia Magna, 2008, 4(4): 120-122.

[50] Gou Su. The Smarandache $3n$ digital sequence and its some asymptotic properties. Journal of Inner Mongolia Normal University (Natural Science Edition), 2010, 39(6): 563-564.

[51] Perez. M. L. Florentin Smarandache Definitions, Solved and Unsolved Problems, Conjectures and Theorems in Number theory and Geometry. Chicago: Xiquan Publishing House, 2000.

[52] 沈虹. 一个新的数论函数及其它的值分布. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2):

235-238.

[53] 潘承洞. 潘承彪. 初等数论. 北京: 北京大学出版社, 1992.

[54] 易媛. 亢小玉. Smarandache问题研究. High American Press, 2006.

[55] 乐茂华. 两个有关伪Smarandache函数的方程. 吉林化工学院学报, 2004, 21(4): 96-104.

[56] Xu ZF and Zhang WP. On a problem of D. H. Lehmer over short intervals. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 320(2): 756-770.

[57] 杜凤英. 关于Smarandache函数$S(n)$的一个猜想. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2): 205-208.

[58] Sandor J. On certain Generalizations of the Smarandache function. Notes Number Theory and Discrete Mathematics, 1999, 5(2): 41-51.

[59] 王妤. 一个包含Smarandache LCM对偶函数的方程. 黑龙江大学自然科学学报, 2008, 25(5): 23-27.

[60] 苟素. 关于$SSSP(n)$和$SISP(n)$的均值. 纯粹数学与应用数学, 2009, 25(3): 431-434.

[61] Smarandache F. Sequences of numbers involved in unsolved problems. Phoenix: Hexis, 2006.

[62] Guo J. and He Y. Several asymptotic formulae on a new arithmetical function. Research on Smarandache problems in number theory, 2004, 115-118.

[63] Lou Y. On the Pseudo Smarandache function. Scientia Magna, 2007, 3(4): 48-50.

[64] Zheng Y. On the Pseudo Smarandache function and its two cojectures. Sientia Magna, 2007, 3(4): 50-53.

[65] 李梵蓓. 一个与Smarandache函数有关的函数方程及其正整数解. 西北大学学报, 2008, 38(6): 892-893.

[66] 黄炜. 赵教练. 关于Smarandache平方根部分数列$a_2(n)$和$b_2(n)$. 重庆师范大学学报, 2010, 27(6): 1-3.

[67] 段辉明. 关于丢番图方程$x^3+1=57y^2$. 重庆师范大学学报, 2010, 27(3): 41-44.

[68] 张福玲. 广义Fibonacci数列的和公式. 重庆师范大学学报, 2010, 28(5): 45-48.

[69] Perzem L Florentin. Smarandache denitions solved and unsolved problems, conjectures and theorems in number theory and geometry. Chicaga Xiquan Publishing House, 2000.

[70] 路玉麟. 一个包含Smarandache函数的方程. 纺织高校基础科学学报, 2008, 21(2): 253-254.

[71] Gorsk I. The Pseudo-Smarandache function. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 140-149.

[72] Zhang A. Smarandache reciprocal function and an elementary in equality. Scientia Magna, 2008, 4(2): 1-3.

[73] Gou Su. The Smarandache kn digital sequence and its mean value properties. Basic Sciences Journal of Textile Universities, 2011, 24(2): 250-253.

[74] Li Fenju. On the difference between the mean value of the Smarandache square parts sequences $SP(n)$ and $IP(n)$. Pure and Applied Mathematics, 2010, 26(1), 69-72.

[75] Murthy A. Smarandache reciprocal function and an elementary inequality. Smarandache Notions Journal, 2000, 11: 312-315.

[76] Duncan R. Applications of uniform distribution to the Fibonacci numbers. The Fibonacci Quarterly, 1967, 5: 137-140.

[77] Huxley M. The distribution of prime numbers. Oxford: Oxford University Press, 1972.

[78] Kuipers L. Remark on a paper by R. L. Duncan concerning the uniform distribution mod 1 of the sequence of the Logarithms of the Fibonacci Numbers. The Fibonacci Quarterly, 1969, 7: 465-466.

[79] Gunarto H and Majumdar A. On Numerical Values of $Z(n)$. Research 0n Number Theory and Smarandache Notions: Proceedings of the Fifth International Conference on Number Theory and Smarandache Notions. London: Hcxis, 2009, 34-50.

[80] Majumdar A. On the Dual Functions $Z^*(n)$ and $S^*(n)$. Research on Number Theory and Smarandache Notions: Proceedings of the Fifth International Conference on Number Theory and Smarandache and Smarandache Notions. London: Hexis, 2009: 74-77.

[81] Robbins N. Fibonacci numbers of the forms $px^2 + 1$, $px^3 + 1$, where p is prime. Applications of Fibonacci Numbers, 1988, 2: 77-88.

[82] Wu Xin and Li Xiaoyan. An Equation Involving Function $S_c(n)$ and $Z^*(n)$. Research on Number Thcory and Smarandache Notions: Proceedings of the Fifth International Conference on Number Theory and Smarandache Notions. London: Hexis, 2009: 52-56.

[83] 张瑾. 一个包含伪Smarandache函数及其对偶函数的方程. 纯粹数学与应用数学, 2009, 25(4): 786-788.

[84] Zhang Wenpeng. Some identities involving the Fibonacci numbers and Lucas numbers. The Fibonacci Quarterly, 2004, 42: 149-154.

[85] Perez M. Florentin Smarandache Definitions, Solved and Unsolved Problems, Conjectures and Theorems in Number Theory and Geometry. Chicago: Xiquan Publishing

House, 2000.

[86] Zhang Wennpeng and Li Ling. Two problems related to the Smarandache function. Scientia Magna, 2008, 3(2): 1-3.

[87] Zhang Wengpeng. On two problems of the Smarandache function. Journal of Northwest University, 2008, 38(2): 173-176.

[88] Yang Mingshun. On a problem of the Pseudo-Smarandache function. Pure and Applied Mathematics, 2008, 24(3): 449-451.

[89] David Gorski. The Pseudo-Smarandache function. Smarandache Notions Journal, 2002, 13: 140-149.

[90] Yi Yuan and Zhang Wenpeng. Some identities involving the Fibonacci polynomials. The Fibonacci Quarterly, 2002, 40(4): 314-318.

[91] Jozsef Sandor. On certain arithmetic functions. Smarandache Notions Journal, 2001, 12: 260-261.

[92] Abramowitz M. and Stegun IA. Handbook of Mathematical Functions With Formulas. Graphs and Mathematical Tables. USA: Dover Publications, 1964.

[93] Mordell LG. On a sum analogous to a Gauss's sum. Quart J Math(Oxford), 1932, 3: 161-167.

[94] Hua LK and Min SH. On a double exponential sum. Science Record, 1942, 1: 23-25.

[95] Hua LK. On an exponential sum. Journal of Chinese Math Soc, 1940, 2: 301-312.

[96] Xu ZF, Zhang WP. Some identities involving the Dirichlet L-function. Acta Arithmatica, 2007, 130(2): 157-166.

[97] 苏娟丽. 关于Smarandache函数的一个下界估计. 纺织高校基础科学学报, 2009, 22(1): 133-134.

[98] 苏娟丽. 关于Smarandache函数的一个新的下界估计. 纯粹数学与应用数学, 2008, 24(4): 706-708.

[99] 李粉菊, 杨畅宇. 关于Smarandache函数的一个下界估计. 西北大学学报(自然科学版), 2011, 41(4): 377-379.

[100] Wang Jinrui. On the Smarandache function and the Fermat numbers. Scientia Magna, 2008, 4(2): 25-28.

[101] Hua LK. On exponential sums over an algebraic field. Canadian J Math, 1951, 3: 44-51.

[102] Min SH. On systems of algebraic equations and certain multiple exponential sums. Quart J Math(Oxford), 1947, 18: 133-142.

[103] Carlitz L and Uchiyama S. Bounds for exponential sums. Duke Math J, 1957, 24(1):

37-41.

[104] Corskid D. The pseudo Smarandache function. Smarandache Notions Journa1, 2002, 13: 140-149.

[105] 郭守明. 推广伪Smarandache函数. 贵州大学学报(自然科学版), 2010, 27(1): 6-7.

[106] 潘承洞. 潘承彪. 哥德巴赫猜想. 北京: 科学出版社, 1981.

[107] 薛西峰. 一类包含Smarandache对偶函数方程的求解. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2007, 35(4): 9-11.

[108] Xu ZF. On the mean value of the complete trigonometric sums with Dirichlet character. Acta Math Sin, 2007, 23(7): 1341-1344.

[109] Liu HN. Mean value of mixed exponential sums. Proc Amer Math Soc, 2008, 136(4): 1193-1203.

[110] 刘建亚. 吕世广. 展涛. 小区间上的素变数三角和. 中国科学(A辑), 2006, 36(4): 448-457.

[111] Davenport H. On certain exponential sums. J Reinc U Angew Math, 1933, 169: 158-176.

[112] Kolesnik G. On the estimation of multiple exponential sums. Recent Progress in Analytic Number Theory, 1981, 1: 231-246.

[113] Liu HN, Zhang WP. On the hybrid mean value of Gauss sums and generalized Bernoulli numbers. Proc Japan Acad Series(Math Sci), 2004, 80(6): 113-115.

[114] Liu HY, Zhang WP. Some identities involving certain Hardy sums and Ramanujan sum. Acta Math Sin, 2005, 21(1): 109-116.

[115] Min SH. On systems of algebraic equations and certain multiple exponential sums. Quart J Math(Oxford), 1947, 18:133-142.

[116] Vinogradov IM. Special variants of the method of trigonometric sums(Russian). Nauka, Moscow, 1976.

[117] Vinogradov IM. The method of trigonometric sums in number theory (Russian). Nauka, Moscow, 1980.

[118] Yi Y, Zhang WP. An application of exponential sum estimates. Acta Math Sin, 2004, 20(5): 851-858.

[119] Yi Y, Zhang WP. On the $2k$-th power mean of inversion of L-functions with the weight of the Gauss sum. Acta Math Sin, 2004, 20(1): 175-180.

[120] Glyn H, Nigel W, Kam W. A new mean value result for Dirichlet L-functions and polynomials. Quart. J. Math, 2004, 55: 307-324.

[121] Heath-Brown DR. An asymptotic series for the mean value of Dirichlet L-functions.

Comment Math Helvetici, 1981, 56:148-161.

[122] Liu HN, Zhang WP. On the mean value of $L(m,\chi)L(n,\chi)$ at positive integers $m, n \geqslant 1$. Acta Arith, 1973, 20: 119-134.

[123] Ramachandra K. A simple proof of the mean fourth power estimate for $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$ and $L\left(\frac{1}{2}+it\right)$. Ann Scuola Norm Sup(Pisa), 1974, 1: 81-97.

[124] Shparlinski IE. On some weighted average values of L-functions. Bull Aust Math Soc, 2009, 79: 183-186.

[125] 易媛, 张文鹏. 关于Dirichlet L-函数的2k次加权均值. 数学进展, 2002, 6: 517-526.

[126] Zhang Wenpeng. The first power mean of the inversion of L-functions weighted by quadratic Gauss sums. Acta Math Sin, 2004, 20(2): 283-292.

[127] Zhang Wenpeng, Yi Yuan, He Xiali. On the 2k-th power mean of Dirichlet L-functions with the weight of general Kloosterman sums. J Number Theory, 2000, 84: 199-213.

[128] Xu Zhefeng and Zhang Wenpeng. On the order of the high-dimensional Cochrane sum and its mean value. Journal of Number Theory, 2006, 117(1): 131-145.

[129] 徐哲峰, 张文鹏. Dirichlet特征及其应用. 北京: 科学出版社, 2008.

[130] Berndt BC. Generalized Dirichlet series and Hecke's functional equation. Proc Edinburgh Math Soc, 1966-1967, 15(2): 309-313.

[131] Berndt BC. Identities involving the coefficients of a class of Dirichlet series III. Trans Amer Math Soc, 1969, 146: 323-342.

[132] Berndt BC. Identities involving the coefficients of a class of Dirichlet series IV. Trans Amer Math Soc, 1970, 149: 179-185.

[133] SlavutskiǐIS. Mean value of L-function and the class number of the cyclotomic field (Russian). Algebraic systems with one action and relation, Leningrad Gos Ped Inst Leningrad, 1985, 122-129.

[134] Stankus E. Mean value of Dirichlet L-functions in the critical strip. Litovskii Matematicheskii Sbornik(Lietuvos Matematikos Rinkinys), 1991, 31(4): 678-686.

[135] 张文鹏. 关于L-函数的二次均值公式. 数学年刊A辑, 1990, 1: 121-127.

[136] 张文鹏. 关于L-函数的均值. 数学研究与评论, 1990, 10(3): 355-360.

[137] Heath-Brown DR. An asymptotic series for the mean value of Dirichlet L-functions. Comment Math Helvetici, 1981, 56:148-161.

[138] Balasubramanian R. A note on Dirichlet L-functions. Acta Arithmatica, 1980, 38: 273-283.

[139] Ivic A. The Riemann zeta-function:The theory of the Riemann zeta-function and

applications. New York: Wiley, 1985.

[140] Phillips E. The zeta-function of Riemann; further developments of van der Corput's method. Quart J Math(Oxford), 1933, 4: 209-225.

[141] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础. 科学出版社, 北京, 1991.

Research on Smarandache functions and other related problems vol.8

Rong Ma

School of Science

Northwestern Polytechnical University

Xi'an, Shaanxi

P. R. China

The Educational Publisher

2012

责任编辑：张玉龙
封面设计：马　森

本书主要介绍 Smarandache 函数与伪 Smaranda -che 函数、几类 Smarandache 序列及其它相关问题的最新研究进展，同时还介绍了一些其它数论问题的研究成果. 本书各部分内容编排相对独立,有兴趣的读者可以从阅读本书任何一个章节开始，开拓读者视野，激发读者对 Smarandache 相关问题的研究兴趣.

This book mainly introduces the latest research progressof Smarandache functions and pseudo-Smarandache functions, several kinds of Smarandache sequences and other related problems. At the same time it also introduces some other study in number theory. This book commits itself to relatively independent content arrangement with each chapter and section, every reader who is interested in this book can read any chapter for the beginning. It could open up readers' perspective; arouse readers to study Smarandache problems.

